



**VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ**

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

**FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ**

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

**ÚSTAV MATEMATIKY**

INSTITUTE OF MATHEMATICS

**GEOMETRICKÁ TEORIE ŘÍZENÍ NA NILPOTENTNÍCH  
LIEOVÝCH GRUPÁCH**

GEOMETRIC CONTROL THEORY ON NILPOTENT LIE GROUPS

**DIPLOMOVÁ PRÁCE**

MASTER'S THESIS

**AUTOR PRÁCE**

AUTHOR

**Bc. Stanislav Frolík**

**VEDOUCÍ PRÁCE**

SUPERVISOR

**doc. Mgr. Jaroslav Hrdina, Ph.D.**

**BRNO 2019**



# Zadání diplomové práce

Ústav: Ústav matematiky  
Student: **Bc. Stanislav Frolík**  
Studijní program: Aplikované vědy v inženýrství  
Studijní obor: Matematické inženýrství  
Vedoucí práce: **doc. Mgr. Jaroslav Hrdina, Ph.D.**  
Akademický rok: 2018/19

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

## Geometrická teorie řízení na nilpotentních Lieových grupách

### Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Hledání optimální trajektorie mobilní platformy pro neholonomní systémy vede na problém hledání geodetik subriemanovské geometrie. Pomocí filtrace řídicí distribuce můžeme pracovat s nilpotentní aproximací a nalézt příslušnou podkladovou Lieovu grupu.

### Cíle diplomové práce:

Nastudování základů subriemanovské geometrie.  
Aplikace nastudovaného aparátu na mechanismy ve filtracích (4,7).  
Diskuze různých modelů řízení na podkladové Lieově grupě.

### Seznam doporučené literatury:

JEAN, Frederic. Control of nonholonomic systems: from sub-Riemannian geometry to motion planning, Springer Briefs in Mathematics, 2014, 104 s.

SELIG, J. M. Geometric Fundamentals of Robotics, Monographs in Computer Science, Springer, 2005, 398 s.

ROUSSEAU, Ch. Mathematics and Technology, Springer Undergraduate Texts in Mathematics and Technology Springer (2008).

MOTL, L. a ZAHRAVNÍK, M. Pěstujeme lineární algebru, Praha : Univerzita Karlova v Praze, nakladatelství Karolinum, 2002. 348 s.

MURRAY, R. M. a ZEXIANG, L. a SASTRY, S. S. A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation, CRC Press, 1994.

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2018/19

V Brně, dne

L. S.

---

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.  
ředitel ústavu

---

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.  
děkan fakulty

## **Abstrakt**

Tato práce se zabývá teorií geometrického řízení na nilpotentních Lieových grupách. V práci jsou popsány základní pojmy diferenciální geometrie a teorie řízení, které jsou následně použity pro popis různých mechanismů. Následně práce navrhuje řízení pomocí dosažených výsledků.

## **Abstract**

This thesis deals with the theory of geometric control of the trident robot. The thesis describes the basic concepts of differential geometry and control theory, which are subsequently used for describing various mechanisms. Finally, the thesis proposes the management using inferred results.

## **klíčová slova**

Lokální říditelnost, neholonomní systém, trident robot, snake robot, Dubin's car, Lieova závorka, diferenciální geometrie, teorie řízení, nilpotentní aproximace, Tanakovo prodloužení

## **keywords**

Local controllability, non-holonomic system, trident robot, snake robot, Dubin's car, Lie bracket, differential geometry, control theory, Nilpotent approximation, Tanaka's prolongation

Bc. FROLÍK, Stanislav. *Geometrická teorie řízení na nilpotentních Lieových grupách*. Brno, 2019. Dostupné také z: <https://www.vutbr.cz/studenti/zav-prace/detail/117457>. Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav matematiky. Vedoucí práce doc. Mgr. Jaroslav Hrdina, Ph.D..



Prohlašuji, že jsem diplomovou práci *Geometrická teorie řízení na nilpotentních Lieových grupách* vypracoval samostatně pod vedením doc. Mgr. Jaroslava Hrdiny, Ph.D. s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

Bc. Stanislav Frolík





Chtěl bych poděkovat panu doc. Mgr. Jaroslavovi Hrdinovi, Ph.D., který mě odborně vedl čtyři semestry, a mojí rodině, která mi poskytovala nejenom morální podporu.

Bc. Stanislav Frolík



# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>12</b>
<b>2</b>	<b>Motivace: Dubin's car a jeho řízení</b>	<b>13</b>
<b>3</b>	<b>Diferenciální geometrie</b>	<b>18</b>
3.1	Distribuce na hladké varietě . . . . .	19
3.2	Philip Hallova báze na distribuci $\mathcal{D}$ . . . . .	20
<b>4</b>	<b>Nilpotentní aproximace</b>	<b>22</b>
4.1	Privilegované souřadnice . . . . .	23
4.2	Nilpotentní aproximace . . . . .	26
4.3	Další mechanismy . . . . .	29
<b>5</b>	<b>Heisenbergova geometrie</b>	<b>35</b>
<b>6</b>	<b>Tanakovo prodloužení</b>	<b>38</b>
6.1	Algebraické Tanakovo prodloužení . . . . .	39
6.2	Geometrické Tanakovo prodloužení . . . . .	42
<b>7</b>	<b>Návrhy řízení</b>	<b>45</b>
<b>8</b>	<b>Závěr</b>	<b>49</b>

# 1 Úvod

Obsahem této závěrečné práce je aplikovat geometrickou teorii řízení na různé příklady planárních mechanismů, jejichž pohyby jsou vázány neholonomními podmínkami. Matematickým modelům takových mechanismů se proto také říká neholonomní systémy a jejich pohyby z pohledu geometrické teorie řízení odpovídají křivkám na vhodné Lieově grupě, můžeme tedy využít algebraické vlastnosti této grupy pro návrh řízení. Cílem této práce je nalézt vhodnou Lieovu grupu, popsat její (infinitesimální) automorfismy, které transformují křivky v konfiguračním prostoru, a tyto výsledky demonstrovat na příkladech řízení.

Každý, kdo využívá hromadnou nebo individuální automobilovou dopravu, se s teorií řízení každý den setkává. Vezměme si například systém samořízených souprav metra v metropolích, nová automobilová vozidla jsou vybavena asistenty udržování vozidla v jízdním pruhu, moduly samočinného parkování anebo dokonce systémy autopilotáže. Všemi těmito problémy se odborně zabývá teorie řízení a tato práce byla motivována právě řízením automobilu.

Hlavním modelem bude mechanismus nazývaný Dubin's car sloužící jako příklad pro budování teorie řízení. Toto vozidlo se může pohybovat pouze vpřed a vzad a může měnit otočení v rovině. V druhé kapitole nalezneme prvky jeho řídicí Lieovy algebry a diskutujeme doplnění o parametr, který popisuje otočení kola v závislosti na překonané dráze. V obou případech nalezneme řídicí Lieovu algebru a obě tyto algebry porovnáme. Jak se ukáže, tyto algebry sice nejsou identické, nicméně na lokální řízení nemá volba mezi těmito Lieovými algebrami vliv.

Ve třetí kapitole budou předchozí úvahy formalizovány pojmy diferenciální geometrie, konfigurační prostor systému bude definován jako hladká varieta. Dále zavedeme pojem distribuce, který systému v každém bodě přiřadí lineární tečný podprostor, tedy řídí pohyb mechanismu, a nakonec pojem Philip-Hallova báze, která je bází této distribuce.

Jelikož obecně není Lieova algebra nilpotentní, uvedeme algoritmus zvaný nilpotentní aproximace vytvořený A. Bellaïchem, který z řídicí algebry vytvoří nilpotentní algebru. Jak se ukáže, tento velmi robustní algoritmus je ve studovaných případech podstatně zredukován. Kromě už zmíněného auta uvedeme další dva mechanismy, a sice planární mechanismus tříčlankového robotického hada a Trident mechanismus. Pro další úvahy tyto dva zmíněné mechanismy už ale využívat nebudeme, jelikož jsou zatíženy velkou výpočetní náročností.

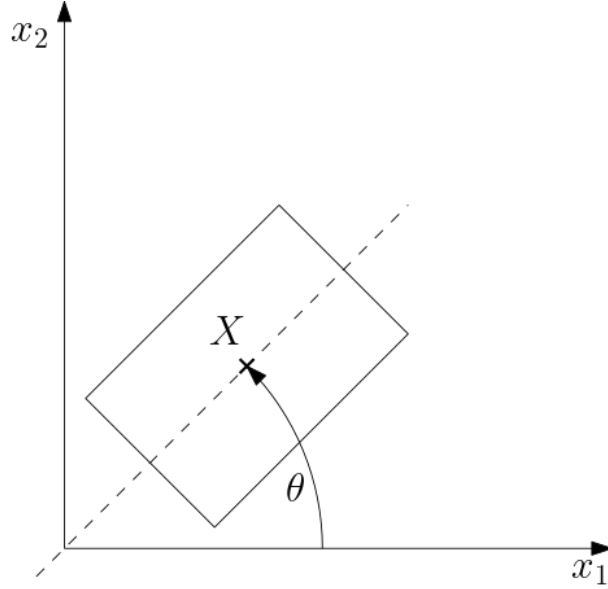
Další kapitola analyzuje Heisenbergovu geometrii. V odvozených vlastnostech tohoto typu geometrie se ukáže, že podkladová Lieova grupa modelu Dubin's car má strukturu Heisenbergovy grupy. To pak využijeme při konstrukci Tanakova prodloužení, což je algoritmus, který nalezne infinitesimální automorfismy, které zachovávají horizontálnost křivek vůči distribuci, to znamená, že zachovává i Heisenbergovu geometrii.

Poslední kapitola ukazuje návrhy řízení modelu Dubin's car, které demonstrují předchozí výsledky. Nejprve bude zvolen vstupní signál jako kombinaci řešení systému tohoto modelu. Tento signál budeme posouvat pomocí infinitesimálních automorfismů po konfiguračním prostoru. Ukáže se, že některé automorfismy tento signál pouze reparametrizují. V dalším kroku bude zvolena integrální křivka, která bude také transformována těmito automorfismy. Narozdíl od předchozího případu se ukáže, že existují i automorfismy, které tuto křivku skutečně transformují. Tyto transformace budou blíže popsány.

## 2 Motivace: Dubin's car a jeho řízení

Uvažujme automobil, kterému se v literatuře říká Dubin's car [1], jehož stav je popsán polohou jeho hmotného středu  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  a natočením  $\theta \in \mathbb{S}^1$  vzhledem k ose  $x^1$ . Konfigurační prostor našeho systému je tedy třídimensionální hladká varieta

$$M = \{q = (x, \theta) \mid x \in \mathbb{R}^2, \theta \in \mathbb{S}^1\} = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1.$$



Obrázek 1: Znázornění orientace Dubin's car na varietě  $M$ .

Předpokládejme, že se tento automobil může pohybovat následujícími směry. Může jet vpřed a vzad konstantní rychlostí  $u_1 \in \mathbb{R}$  a může se otočit kolem svého hmotného středu konstantní úhlovou rychlostí  $u_2 \in \mathbb{R}$ . Tyto pohyby můžeme libovolně kombinovat. Rovnice popisující pohyb vpřed a vzad jsou tedy

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= u_1 \cos \theta, \\ \dot{x}_2 &= u_1 \sin \theta, \\ \dot{\theta} &= 0.\end{aligned}$$

Rovnice popisující rotaci kolem těžiště jsou

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 0, \\ \dot{x}_2 &= 0, \\ \dot{\theta} &= u_2.\end{aligned}$$

Řídící parametr  $u = (u_1, u_2)$  může mít libovolné hodnoty v dané podmnožině  $U \subset \mathbb{R}^2$ . Předchozí dvě soustavy obyčejných diferenciálních rovnic lze vektorově zapsat jako

$$\dot{q} = u_1 V_1(q), \quad \dot{q} = u_2 V_2(q),$$

kde

$$q = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \theta \end{pmatrix}, \quad V_1(q) = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_2(q) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Potom můžeme systém přepsat jako

$$\dot{q} = u_1 V_1(q) + u_2 V_2(q), \quad q \in M, \quad u \in U. \quad (1)$$

Zřejmě lze z počátečního stavu  $q_f = (x_f, \theta_f) \in M$  dosáhnout libovolného stavu  $q_1 = (x_1, \theta_1) \in M$  střídáním pohybu vpřed a vzad a rotací kolem těžiště, takže každého takového koncového stavu lze dosáhnout pohybem podél vektorových polí  $V_1$  a  $V_2$ . Označme  $P_1^t, P_2^t$  zmíněné pohyby chápané jako toky vektorových polí  $V_1$  a  $V_2$  na  $M$  a vypočtěme jejich komutátor následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} P_2^{-t} \circ P_1^{-t} \circ P_2^t \circ P_1^t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \theta \end{pmatrix} &= P_2^{-t} \circ P_1^{-t} \circ P_2^t \begin{pmatrix} x_1 + (\cos \theta)t \\ x_2 + (\sin \theta)t \\ \theta \end{pmatrix} = P_2^{-t} \circ P_1^{-t} \begin{pmatrix} x_1 + (\cos \theta)t \\ x_2 + (\sin \theta)t \\ \theta + t \end{pmatrix} \\ &= P_2^{-t} \begin{pmatrix} x_1 + (\cos \theta)t - \cos(\theta + t)t \\ x_2 + (\sin \theta)t - \sin(\theta + t)t \\ \theta + t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + (\cos \theta)t - \cos(\theta + t)t \\ x_2 + (\sin \theta)t - \sin(\theta + t)t \\ \theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Spočítejme Taylorův rozvoj tohoto toku v bodě  $t_0 = 0$ , tj. konkrétně jednotlivých souřadnic.

$$\begin{aligned} v_1 &= x_1 + (\cos \theta - \cos(\theta + t))t \implies v_1|_{t_0} = x_1, \\ \dot{v}_1 &= \cos \theta - \cos(\theta + t) + t \sin(\theta + t) \implies \dot{v}_1|_{t_0} = 0, \\ \ddot{v}_1 &= \sin(\theta + t) + \sin(\theta + t) + t \cos(\theta + t) \implies \ddot{v}_1|_{t_0} = 2 \sin \theta, \\ v_2 &= x_2 + (\sin \theta - \sin(\theta + t))t \implies v_2|_{t_0} = x_2, \\ \dot{v}_2 &= \sin \theta - \sin(\theta + t) - t \cos(\theta + t) \implies \dot{v}_2|_{t_0} = 0, \\ \ddot{v}_2 &= -\cos(\theta + t) - \cos(\theta + t) + t \sin(\theta + t) \implies \ddot{v}_2|_{t_0} = -2 \cos \theta, \\ v_3 &= \theta \implies v_3|_{t_0} = \theta, \\ \dot{v}_3 &= 0 \implies \dot{v}_3|_{t_0} = 0, \\ \ddot{v}_3 &= 0 \implies \ddot{v}_3|_{t_0} = 0. \end{aligned}$$

Taylorovým rozvojem toku v bodě  $t = 0$  dostaneme ekvivalentní výraz

$$P_2^{-t} \circ P_1^{-t} \circ P_2^t \circ P_1^t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} t^2 + O(t^3).$$

**Definice 2.1.** Necht  $V_1, V_2$  jsou vektorová pole na varietě  $M$ . Potom definujme Lieovu závorku vektorových polí  $[\cdot, \cdot]$  jako vektorové pole

$$[V_1, V_2] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dV_2}{dq} V_1(q) - \frac{dV_1}{dq} V_2(q),$$

kde  $\frac{dV_i}{dq}$  je Jacobián vektorového pole  $V_i$  a v našem případě pro  $M = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$  dostaneme

$$\frac{dV_i}{dq} = \begin{pmatrix} \frac{dv_1^i}{dq} \\ \frac{dv_2^i}{dq} \\ \frac{dv_3^i}{dq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1^i}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1^i}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1^i}{\partial \theta} \\ \frac{\partial v_2^i}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2^i}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2^i}{\partial \theta} \\ \frac{\partial v_3^i}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3^i}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3^i}{\partial \theta} \end{pmatrix}.$$

Potom můžeme Lieovu závorku  $[V_1, V_2]$  spočítat ve smyslu předchozí definice jako

$$\begin{aligned}\frac{dV_1}{dq} &= \begin{pmatrix} \frac{d}{dq} \cos \theta \\ \frac{d}{dq} \sin \theta \\ \frac{d}{dq} 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 0 & \cos \theta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \frac{dV_2}{dq} &= \begin{pmatrix} \frac{d}{dq} 0 \\ \frac{d}{dq} 0 \\ \frac{d}{dq} 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ V_{12} := [V_1, V_2] &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

a vidíme, že  $[V_1, V_2]$  je kvadratickým členem v předchozím Taylorově polynomu. Spočítejme ještě navíc dvě závorky vyššího řádu.

$$\begin{aligned}V_{121} := [[V_1, V_2], V_1] &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 0 & \cos \theta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\cos \theta \\ 0 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ V_{122} := [[V_1, V_2], V_2] &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\cos \theta \\ 0 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} = V_1.\end{aligned}$$

Pole  $V_1, V_2, V_{12}$  tvoří tedy vektorový prostor uzavřený na Lieovu závorku, takovému vektorovému prostoru se říká Lieova algebra. Tato pole tedy tvoří algebru s multiplikativní tabulkou

$[\cdot, \cdot]$	$V_1$	$V_2$	$V_{12}$
$V_1$	0	$V_{12}$	0
$V_2$	$-V_{12}$	0	$V_1$
$V_{12}$	0	$-V_1$	0

Tabulka 1: Multiplikativní tabulka algebry generované vektorovými poli  $V_1, V_2$

Výpočtem lze ukázat, že úplný Taylorův rozvoj zobrazení  $P_2^{-t} \circ P_1^{-t} \circ P_2^t \circ P_1^t(q)$  v bodě  $t_0 = 0$  je

$$T(0) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \theta \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)!} \begin{pmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} t^{2k} + \frac{1}{2k!} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} t^{2k+1}.$$

Všimněme si, že členy tohoto polynomu jsou Lieovy závorky vyšších řádů. Z multiplikativní tabulky vyplývá, že se jedná o konečně generovanou Lieovu algebru. Představme si nyní, že automobil je v počátku, tedy v bodě  $q_0 = (0, 0, 0)$ . Potom tedy

$$V_1(q_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_2(q_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad V_3 := [V_1, V_2](q_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Jako další krok provedme transformaci takovou, aby tato vektorová pole byla v bodě  $q_0$  v následujícím tvaru:

$$V_i(q_0) = \begin{pmatrix} \delta_1^i \\ \delta_2^i \\ \delta_3^i \end{pmatrix},$$

kde  $\delta_j^i$  je Kroneckerův symbol. Transformujme souřadnice  $(x_1, x_2, \theta)$  do nových souřadnic  $(y_1, y_2, y_3)$ .

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = \theta, \quad y_3 = -x_2$$

Potom jsou vektorová pole  $V_1, V_2, V_3$  v nových souřadnicích následující

$$V_1 = \begin{pmatrix} \cos y_2 \\ 0 \\ -\sin y_2 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vektorová pole jsou opět tvořena goniometrickými funkcemi a závorky těchto polí budou generovat další pole. Využijeme-li v okolí bodu  $q_0$  známé aproximace  $\sin(x) \approx x, \cos(x) \approx 1$  můžeme předchozí pole aproximovat poli tvořenými polynomy.

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -y_2 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Spočítáme-li Lieovu závorku těchto polí

$$V_{12} := [V_1, V_2] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a navíc ještě spočítáme závorky druhého řádu

$$\begin{aligned} V_{112} &:= [V_1, [V_1, V_2]] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ V_{212} &:= [V_2, [V_1, V_2]] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

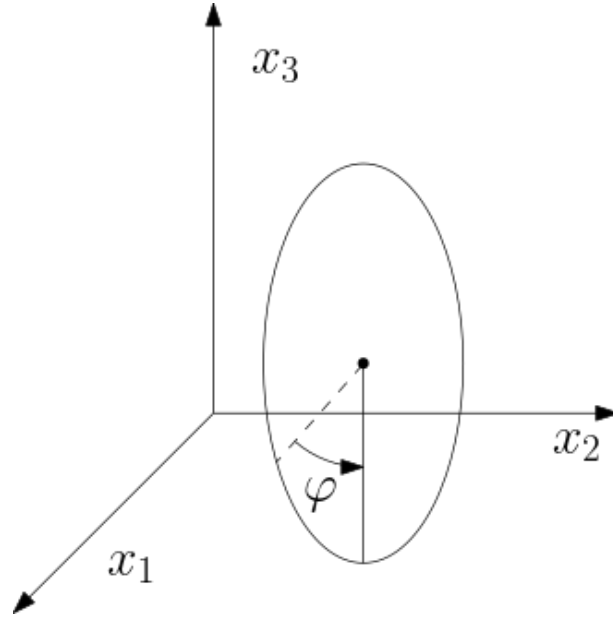
je zřejmé, že tato Lieova algebra má následující multiplikativní tabulku.

$[\cdot, \cdot]$	$V_1$	$V_2$	$V_{12}$
$V_1$	0	$V_{12}$	0
$V_2$	$-V_{12}$	0	0
$V_{12}$	0	0	0

Tabulka 2: Multiplikativní tabulka Lieovy algebry po aproximaci

Všimněme si, že závorky vyšších řádů (například  $[X_1, [X_2, [X_3, [X_i, X_j]]]]$ ) jsou už nulové. Takové algebře se říká nilpotentní [2], my tuto vlastnost budeme definovat později. Smyslem těchto úvah je, že v okolí zvoleného bodu  $q_0$  můžeme vektorová pole nahradit vektorovými poli takovými, která tvoří nilpotentní algebru.





Obrázek 2: Znázornění parametru otočení kola  $\varphi$

V literatuře se běžně uvažuje model, kde vnitřní konfigurace mechanismu zahrnuje parametr otočení kola  $\varphi$ . Budeme požadovat, aby kolo, které je oporou auta, se otáčelo v závislosti na pozici vozidla, viz obrázek 2. Jinými slovy nebude docházet k prokluzu, ale budeme požadovat, aby se kolo přirozeně valilo po podstavě a to bez prokluzu. Přidáním tohoto řídicího parametru se nám změní konfigurační prostor na  $M = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ . Potom můžeme tuto závislost vyjádřit jako

$$\dot{x}_1 = \cos(\theta)\dot{\varphi},$$

$$\dot{x}_2 = \sin(\theta)\dot{\varphi},$$

neboli

$$\dot{x}_1 - \cos(\theta)\dot{\varphi} = 0,$$

$$\dot{x}_2 - \sin(\theta)\dot{\varphi} = 0,$$

a maticově

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\cos(\theta) \\ 0 & 1 & 0 & -\sin(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Při volbě parametrů  $u_1 := \dot{\varphi}$  a  $u_2 := \dot{\theta}$  je řešení

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \dot{q} = u_1 V_1(q) + u_2 V_2(q) = u_1 \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Spočítejme nyní závorku  $[V_1, V_2]$ .

$$V_{12} := [V_1, V_2] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sin(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\theta) \\ -\cos(\theta) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Všimněme si podobnosti se závorkou  $[V_1, V_2]$  z předchozího výpočtu, odpovídá totiž stejnému toku. Spočítejme ještě závorku vyššího řádu.

$$[V_2, V_{12}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tyto výpočty shrneme do následující multiplikativní tabulky.

$[\cdot, \cdot]$	$V_1$	$V_2$	$V_{12}$	$V_{212}$
$V_1$	0	$V_{12}$	0	0
$V_2$	$-V_{12}$	0	$V_{212}$	$V_{12}$
$V_{12}$	0	$-V_{212}$	0	0
$V_{212}$	0	$-V_{12}$	0	0

Tabulka 3: Multiplikativní tabulka po přidání parametru  $\varphi$

Algebrám generovaným vektorovými poli určujícími systém (1), tj. v našem případě  $\text{Lie}\{V_1, V_2\}$ , se říká algebry říditelnosti a mají přímý vztah k řízení, jak ukazuje následující věta Chow-Rashevského o lokální říditelnosti kontrolních systémů.

**Věta 2.2.** (*Chow, Rashevsky*) *Nechť  $M$  je hladká varieta a  $X_1, \dots, X_m$  je  $m$  hladkých vektorových polí na  $M$ . Nechť navíc Lieova algebra*

$$\text{Lie}\{X_1, \dots, X_m\}(x) = T_x M, \quad \forall x \in M.$$

*Pak systém*

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^m u_i X_i(x)$$

*je lokálně říditelný pro každé  $t$  v každém bodě  $x \in M$ .*

Je přímo vidět, že naše algebry toto splňují, čili systém (1) má řešení a je lokálně říditelný.

### 3 Diferenciální geometrie

V této kapitole budeme formálně definovat pojmy diferenciální geometrie, které nám pomohou v další analýze modelového příkladu. Nejprve definujme jeho konfigurační prostor jako hladkou varietu.

**Definice 3.1.** Nechť  $(M, \tau)$  je Hausdorffův topologický prostor. Potom množina dvojic

$$\{(V_\alpha, \psi_\alpha)\}_\alpha,$$

kde  $V_\alpha \in \tau$  jsou otevřené množiny a  $\psi_\alpha : V_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$  je zobrazení, se nazývá atlas na  $M$ , pokud

$$\psi_\alpha : V_\alpha \rightarrow \psi_\alpha(V_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$$

je homeomorfismus otevřené podmnožiny  $V_\alpha$  množiny  $M$  do otevřené podmnožiny  $\psi_\alpha(V_\alpha)$  množiny  $\mathbb{R}^n$  a

$$\bigcup_{\alpha} V_\alpha = V.$$

Zobrazení  $\psi_\alpha$  nazýváme mapy a v souřadnicích mohou být definovány jako

$$\psi_\alpha(p) = (\chi^1(p), \dots, \chi^n(p)),$$

kde  $\chi^i : V_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $p \in V_\alpha$ .

**Definice 3.2.** Prostor  $(M, \tau)$  se nazývá hladká varieta, pokud existuje atlas  $\{(V_\alpha, \psi_\alpha)\}_\alpha$  na  $M$  takový, že pro  $V_\alpha \cap V_\beta \neq \emptyset$  zobrazení

$$\Phi_{\alpha\beta} = \psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1} : \psi_\beta^{-1}(V_\alpha \cap V_\beta) \rightarrow \psi_\alpha(V_\alpha \cap V_\beta)$$

je hladká funkce.

**Definice 3.3.** Nechť  $M$  je hladká varieta a  $\mathcal{F}(M)$  je množina všech hladkých funkcí definovaných na  $M$ , pak tečným prostorem  $T_x M$  variety  $M$  v bodě  $x \in M$  nazveme množinu všech funkcionálů  $W : \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathbb{R}$  splňujících

1.  $W(\alpha f + \beta g) = \alpha W(f) + \beta W(g)$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, f, g \in \mathcal{F}(M)$ ,
2.  $W(fg) = f(x)W(g) + g(x)W(f)$ ,  $f, g \in \mathcal{F}(M)$ .

Každý prvek  $T_x M$  nazveme tečným vektorem  $M$  v bodě  $x$ .

**Definice 3.4.** Nechť  $T_x M$  je tečný prostor v bodě  $x \in M$ . Sjednocení

$$TM = \bigcup_{x \in M} T_x M$$

nazýváme tečný bandl variety  $M$ .

**Definice 3.5.** Mějme hladkou varietu  $M$ , pak vektorovým polem  $V$  na  $M$  nazveme zobrazení

$$x \mapsto V(x), \quad V(x) \in T_x M, x \in M,$$

kde  $T_x M$  je tečný prostor  $M$  v bodě  $x$ .

V dalších úvahách budeme konfigurační prostor uvažovat jako hladkou varietu.

### 3.1 Distribuce na hladké varietě

**Definice 3.6.**  $k$ -rozměrnou distribucí  $\mathcal{D}$  na varietě  $M$  nazveme pravidlo, které každému bodu  $x \in M$  přiřazuje  $k$ -rozměrný lineární podprostor  $\mathcal{D}(x) \subset T_x M$ .

Distribuce  $\mathcal{D}$  řádu  $k$  na varietě  $M$  přiřazuje každému bodu  $p \in M$   $k$ -dimenzionální lineární podprostor  $\mathcal{D}_p$  prostoru  $T_p M$ . Distribuce  $\mathcal{D}$  se nazývá diferencovatelná, pokud každý bod  $p \in M$  má na okolí  $\nu$   $k$  diferencovatelných vektorových polí  $X_1, X_2, \dots, X_k$  na  $\nu$ , které tvoří bázi  $\mathcal{D}_p$  pro všechna  $p \in \nu$ , takže můžeme psát  $\mathcal{D} = \text{span}\{X_1, \dots, X_k\}$  na  $\nu$ . Distribuce  $\mathcal{D}$  se nazývá involutivní, pokud  $[X, Y] \in \mathcal{D}_p$ , pro každé  $X, Y \in \mathcal{D}_p, \forall p \in M$ . Integrální podvarieta distribuce  $\mathcal{D}$  je podvarieta  $N$  variety  $M$  taková, že

$$Tf(T_p N) = \mathcal{D}_p, \forall p \in N,$$

kde  $f : N \rightarrow M$  je vnoření. Varieta  $N$  se nazývá maximální integrální podvarieta distribuce  $\mathcal{D}$ , pokud neexistuje žádná další integrální podvarieta distribuce  $\mathcal{D}$ , která obsahuje  $N$ . Distribuce  $\mathcal{D}$ , která má pouze jednu maximální integrální podvarietu ve všech bodech, se nazývá integrovatelná distribuce. Horizontální vektorová pole jsou vektorová pole

$X : M \rightarrow TM$ , že  $p \rightarrow X(p) \in \mathcal{D}_p, \forall p \in M$  a  $\Gamma(\mathcal{D})$  je množina horizontálních vektorových polí na  $M$ , která tvoří vektorový prostor. Definujme následující posloupnost vektorových podprostorů  $\Gamma(\mathcal{D})$ :

$$\begin{aligned} C^{(1)} &= \{[X, Y]; X, Y \in \Gamma(\mathcal{D})\}, \\ C^{(2)} &= \{[[X, Y], Z]; X, Y, Z \in \Gamma(\mathcal{D})\}, \\ C^{(3)} &= \{[C^{(2)}, Z]; Z \in \Gamma(\mathcal{D})\}, \\ &\vdots \\ C^{(n+1)} &= \{[C^{(n)}, Z]; Z \in \Gamma(\mathcal{D})\}, \end{aligned}$$

kde  $C^{(n)}$  je množina vektorových polí získaná  $n$ -tou iterací Lieovy závorky horizontálních vektorových polí. Vektor

$$(|C_p^{(1)}|, |C_p^{(2)}|, \dots, |C_p^{(n+1)}|, \dots)$$

nazýváme vektorem filtrace distribuce  $\mathcal{D}_p$  v bodě  $p$ .

**Definice 3.7.** Distribuce  $\mathcal{D}$  se nazývá nilpotentní, pokud existuje číslo  $n \geq 1$  takové, že  $C^{(n)} = 0$ , tj. všechny  $n$ -té iterace Lieovy závorky jsou nulové. Nejmenší z těchto čísel  $n$  splňující tuto podmínku se nazývá nilpotentní řád distribuce  $\mathcal{D}$ .

**Definice 3.8.** Definujme posloupnost vah v bodě  $p$ ,  $w_i = w_i(p), i = 1, \dots, n$  tak, že  $w_j = s$  pokud

$$n_{s-1}(p) < j \leq n_s(p), \quad n_0 = 0,$$

kde  $(n_1(p), \dots, n_r(p))$  je vektor filtrace.

**Příklad 3.9.** V případě algebry říditelnosti Dubinova auta (Tabulka 1) v  $\mathbb{R}^3$  dostáváme vektor filtrace  $(2, 3)$  v každém bodě. Pak posloupnost vah v každém bodě je

$$w_1 = w_2 = 1, w_3 = 2.$$

## 3.2 Philip Hallova báze na distribuci $\mathcal{D}$

Dvojice  $(\Gamma(TM), [\cdot, \cdot])$ , kde  $\Gamma(TM)$  jsou vektorová pole, tvoří vektorový prostor s operací  $[\cdot, \cdot]$  mající tyto vlastnosti:

a) bilinearita

$$[ax + by, z] = a[x, z] + b[y, z], [x, ay + bz] = a[x, y] + b[x, z]$$

b) antikomutativita

$$[x, y] = -[y, x]$$

c) Jacobiho identita

$$[x, [y, z]] + [z, [x, y]] + [y, [z, x]] = 0$$

Pokud  $X_1, \dots, X_k$  je báze  $\mathcal{D}$ , Lieovu algebru generovanou  $X_1, \dots, X_k$  označujeme  $Lie\{X_1, \dots, X_k\}$ .

**Příklad 3.10.** Mějme 7-dimenzionální varietu o souřadnicích  $(x, y, z, k, l, m, n)$  a následující vektorová pole.

$$\begin{aligned} X_1 &= y^2 \partial_x + (x+1) \partial_z, \\ X_2 &= x \partial_x + k^3 \partial_l, \\ X_3 &= z \partial_m + 4 \partial_y, \\ X_4 &= 6k \partial_k + l^2 \partial_n. \end{aligned}$$

Sestrojme část multiplikativní tabulky Lieovy algebry  $Lie\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$  generované touto distribucí.

$[\cdot, \cdot]$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_{12}$	$X_{13}$	$X_{24}$
$X_1$	0	$X_{12}$	$X_{13}$	0	$X_{112}$	$X_{113}$	0
$X_2$	$-X_{12}$	0	0	$X_{24}$	$X_{212}$	$X_{213}$	0
$X_3$	$-X_{13}$	0	0	0	$X_{312}$	$X_{313}$	0
$X_4$	0	$-X_{24}$	0	0	0	0	0
$X_{12}$	$-X_{112}$	$-X_{212}$	$-X_{312}$	0	0	$X_{1213}$	0
$X_{13}$	$-X_{113}$	$-X_{213}$	$-X_{313}$	0	$-X_{1213}$	0	0
$X_{24}$	0	0	0	0	0	0	0

Vidíme, že po prvních několika iteracích nevypadá, že by se proces zastavil. Může se totiž stát, že Lieova algebra je nekonečná.

**Příklad 3.11.** Sestrojme multiplikativní tabulku Lieovy algebry  $Lie\{X_1, X_2, X_3\}$  na distribuci dimenze 4, generovanou třemi vektorovými poli.

$$\begin{aligned}
X_1 &= \sqrt{y}\partial_y, \\
X_2 &= z^2\partial_x + \partial_v, \\
X_3 &= \partial_z + z\partial_v, \\
X_{23} &:= [X_2, X_3] = -2z\partial_x.
\end{aligned}$$

Počítejme další Lieovy závorky.

$$\begin{aligned}
X_{12} &:= [X_1, X_2] = 0, \\
X_{13} &:= [X_1, X_3] = 0, \\
X_{123} &:= [X_1, [X_2, X_3]] = 0, \\
X_{223} &:= [X_2, [X_2, X_3]] = 0, \\
X_{323} &:= [X_3, [X_2, X_3]] = -2\partial_x
\end{aligned}$$

Nyní již můžeme sestavit multiplikativní tabulku Lieovy algebry generované touto distribucí.

$[\cdot, \cdot]$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_{23}$	$X_{323}$
$X_1$	0	0	0	0	0
$X_2$	0	0	$X_{23}$	0	0
$X_3$	0	$-X_{23}$	0	$X_{323}$	0
$X_{23}$	0	0	$-X_{323}$	0	0
$X_{323}$	0	0	0	0	0

Vidíme, že v tomto případě je konečná a dokonce i nilpotentní.

Nechť  $Lie\{X_1, \dots, X_n\}$  je Lieova algebra generovaná množinou vektorových polí  $X_1, \dots, X_n$ . Jako vektorový prostor je algebra  $Lie\{X_1, \dots, X_n\}$  generovaná množinou všech algebraických generátorů a všech jejich Lieových závorek. Nicméně ne všech Lieovy závorky jsou lineárně nezávislé, například kvůli antisymetrii Jacobiho identity. Philip Hallový báze jsou jednou z možností, jak vybrat bázi s ohledem na identity, které závorka splňuje.

**Definice 3.12.** Mějme množinu generátorů  $\{X_1, \dots, X_n\}$ . Definujme hloubku Lieovy závorky jako

$$l(X_i) = 1 \quad i = 1, \dots, n$$

$$l([A, B]) = l(A) + l(B),$$

kde  $A$  a  $B$  jsou vektorová pole získaná Lieovou závorkou z vektorových polí  $X_1, \dots, X_n$ .

**Definice 3.13.** Philip Hallova báze je uspořádaná množina vektorových polí a jejich Lieových závorek  $H = \{B_i\}$  splňující:

1.  $X_i \in H, i = 1, \dots, n$
2. Pokud  $l(B_i) < l(B_j)$ , pak  $B_i < B_j$
3.  $[B_i, B_j] \in H$ , právě tehdy když
  - (a)  $B_i, B_j \in H$  a  $B_i < B_j$  a
  - (b) buď platí  $B_j = X_k$  pro nějaké  $k$  nebo  $B_j = [B_l, B_r]$ , kde  $B_l, B_r \in H$  a  $B_l \leq B_r$ .

První podmínka inicializuje algoritmus konstrukce Philip Hallovy báze předpokladem, že daná vektorová pole generující distribuci tvoří bázi. Druhá podmínka srovná vektorová pole podle jejich hloubky. Platí, že se zvyšující se hloubkou může dojít k lineární závislosti na již existujících prvcích báze, jak uvidíme v dalším příkladu. Samotný princip hledání Philip Hallovy báze vysvětluje třetí podmínka. Zřejmě pro konstrukci Philip Hallových bází lze tuto definici omezit pouze na podmínku 3.

**Příklad 3.14.** Philip Hallova báze stupně 3

Báze nilpotentní Lieovy algebry stupně 3 generovaná vektorovými polí  $X_1, X_2, X_3$  je

$$\begin{array}{ccccccc} & X_1 & & X_2 & & X_3 & \\ & [X_1, X_2] & & [X_2, X_3] & & [X_3, X_1] & \\ [X_1, [X_1, X_2]] & & [X_1, [X_1, X_3]] & & [X_2, [X_1, X_2]] & & [X_2, [X_1, X_3]] \\ [X_2, [X_2, X_3]] & & [X_3, [X_1, X_2]] & & [X_3, [X_1, X_3]] & & [X_3, [X_2, X_3]] \end{array}$$

Poznamenejme, že skutečně například vektorové pole  $[X_1, [X_2, X_3]]$  v této bázi není, protože

$$[X_1, [X_2, X_3]] = [X_2, [X_3, X_1]] - [X_3, [X_1, X_2]]$$

tj. podle Jacobiho identity je pole  $[X_1, [X_2, X_3]]$  lineární kombinací polí  $[X_2, [X_3, X_1]]$ ,  $[X_3, [X_1, X_2]]$ , která už tvoří Philip Hallovu bázi.

## 4 Nilpotentní aproximace

V předchozích příkladech jsme zjistili, že řídící distribuce většinou nebyly nilpotentní. To je ale vlastnost, která nás zajímá. Nyní uvedeme algoritmus aproximace, který vytvoří nilpotentní algebru. Označme  $x = (x_1, \dots, x_n)$  kanonické souřadnice v  $\mathbb{R}^n$ .

*Poznámka.* Množinou  $H$  značíme indexovou množinu.

Pro každý bod  $p$  na varietě  $M$ , vytvoříme nilpotentní aproximaci  $\mathcal{A}(p)$  polí  $(X_1, \dots, X_m)$  v bodě  $p$  následujícím způsobem:

1. Vezměme  $X_{I_j}$ , kde  $I_j \in H$ .
2. Vypočteme afinní transformaci souřadnic  $x \mapsto y = (y_1, \dots, y_n)$  takovou, že nové souřadnice  $y$  splňují  $\partial_{y_j} = X_{I_j}(p), j = 1, \dots, n$ .

3. Vytvořme systém privilegovaných souřadnic  $\tilde{z} = (\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_n)$  pomocí následující iterativní formule

$$\tilde{z}_j := y_j - \sum_{k=2}^{w_j-1} h_k(y_1, \dots, y_{j-1}),$$

pro  $j = 1, \dots, n$  a navíc pro  $k = 2, \dots, w_j - 1$  platí

$$h_k(y_1, \dots, y_{j-1}) = \sum_{\substack{|\alpha|=k \\ w(\alpha) < w_j}} X_{I_1}^{\alpha_1} \dots X_{I_{j-1}}^{\alpha_{j-1}} \cdot (y_j - \sum_{q=2}^{k-1} h_q)(y) \Big|_{y=0} \frac{y_1^{\alpha_1}}{\alpha_1!} \dots \frac{y_{j-1}^{\alpha_{j-1}}}{\alpha_{j-1}!},$$

kde  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ . V případě Dubinova auta obsahuje posloupnost vah nejvyšší váhu 2. Tudíž se výrazně zjednoduší konstrukce privilegovaných souřadnic na výraz

$$\tilde{z}_j := y_j,$$

neboť suma v původním případě postrádá smysl. V celé práci budeme pracovat s mechanismy, jejichž váhy budou nejvýše 2. Tudíž budeme používat pouze tuto zredukovanou variantu konstrukce privilegovaných souřadnic.

4. Pro  $i = 1, \dots, m$  vypočítejme Taylorův rozvoj pole  $X_i(\tilde{z})$  v bodě  $p$  a vyjádříme každé vektorové pole jako sumu vektorových polí,

$$X_i(\tilde{z}) = X_i^{(-1)}(\tilde{z}) + X_i^{(0)}(\tilde{z}) + \dots,$$

kde  $X_i^{(k)}(\tilde{z})$  označujeme sumu všech výrazů hloubky filtrace  $k$ . Jelikož ve všech případech máme hloubku filtrace  $k = 2$ , pak budeme vektorová pole aproximovat Taylorovým rozvojem stupně 2.

5. Definujme vektorová pole  $\hat{X}_1^p, \dots, \hat{X}_m^p$  na  $\Omega$  jako  $\hat{X}_i^p := X_i^{(-1)}$  pro všechna  $i = 1, \dots, m$ , a navíc  $\mathcal{A}(p) := (\hat{X}_1^p, \dots, \hat{X}_m^p)$ .
6. Definujme  $\Phi(p, \cdot)$  jako zobrazení  $x \mapsto z$ .

Výstup algoritmu jsou zobrazení  $\Phi$  a  $\mathcal{A}$ , kde  $\Phi$  je spojitě měnící se systém privilegovaných souřadnic a  $\mathcal{A}$  je spojitá nilpotentní aproximace polí  $(X_1, \dots, X_m)$  na  $\Omega$ .

## 4.1 Privilegované souřadnice

Na varietě  $M$  mějmě v okolí bodu  $p \in M$  lokální souřadnice  $(x_1, \dots, x_k)$ . Nechtě  $X_1, \dots, X_k$  je  $k$  diferencovatelných vektorových polí na varietě  $M$ , takové, že  $T_p M = \langle X_1(p), \dots, X_k(p) \rangle$ . Vektorová pole  $X_1, \dots, X_k$  zapišme v souřadnicích  $(x_1, \dots, x_k)$  lokálně v maticovém tvaru:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}(p) & \dots & a_{1,k}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k,1}(p) & \dots & a_{k,k}(p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \\ \vdots \\ \partial_{x_k} \end{pmatrix} \quad (2)$$

Zvolme nyní bod  $p$  a hledejme nové lokální souřadnice  $(y_1, \dots, y_k)$  takové, že vektorová pole  $X_1, \dots, X_k$  vyjádřené v nových souřadnicích  $y_1, \dots, y_k$  odpovídají parciálním derivacím v bodě  $p \in M$ , tj. splňují

$$\begin{aligned} X_1|_p &= \partial_{y_1}, \\ X_2|_p &= \partial_{y_2}, \\ &\vdots \\ X_k|_p &= \partial_{y_k}, \end{aligned} \quad (3)$$

tedy

$$X_i(y_j)|_p = \delta_{ij},$$

kde  $\delta_{ij}$  je Kroneckerův symbol. Tedy maticově (2) a (3) dává

$$I_k = \begin{pmatrix} a_{1,1}(p) & a_{1,2}(p) & \dots & a_{1,k}(p) \\ a_{2,1}(p) & a_{2,2}(p) & \dots & a_{2,k}(p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k,1}(p) & a_{k,2}(p) & \dots & a_{k,k}(p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(p) & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_1}(p) \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(p) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(p) & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_2}(p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_k}(p) & \frac{\partial f_2}{\partial x_k}(p) & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_k}(p) \end{pmatrix}, \quad (4)$$

kde  $y_i = f_i(x_1, \dots, x_n)$  jsou funkce transformace souřadnic,  $I_k$  je jednotková matice řádu  $k$ . Zřejmě

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(p) & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_1}(p) \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(p) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(p) & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_2}(p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_k}(p) & \frac{\partial f_2}{\partial x_k}(p) & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_k}(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}(p) & a_{1,2}(p) & \dots & a_{1,k}(p) \\ a_{2,1}(p) & a_{2,2}(p) & \dots & a_{2,k}(p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k,1}(p) & a_{k,2}(p) & \dots & a_{k,k}(p) \end{pmatrix}^{-1},$$

kde předpokládáme, že volíme bod  $p \in M$ , pro který inverze existuje. Navíc předpokládejme, že transformační funkce jsou vzhledem k souřadnicím  $(x_1, \dots, x_k)$  lineární. To pro splnění podmínky (3) v bodě  $p$  stačí. Pak zřejmě se v  $j$ -tém sloupci nachází derivace podle  $x_j$ . Úpravou předešlých výrazů získáme následující rovnost.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix} = \left( \begin{pmatrix} a_{1,1}(p) & \dots & a_{1,k}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k,1}(p) & \dots & a_{k,k}(p) \end{pmatrix}^{-1} \right)^T \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \quad (5)$$

Tyto souřadnice  $y_1, \dots, y_k$  splňují podmínku (3) a nazýváme je privilegované souřadnice.

**Příklad 4.1.** Mějme hladkou varietu  $M$  dimenze 4 mající souřadnice  $(x, y, z, w)$  a na ní vektorová pole

$$\begin{aligned} X_1 &= -x\partial_x + x^2\partial_z - y^3\partial_w, \\ X_2 &= z^3\partial_y - \partial_z + (x+y)\partial_w, \\ X_3 &= (y-w)\partial_x + \frac{x}{z}\partial_z + xy\partial_w, \\ X_4 &= w^2z\partial_y + \partial_x + 2w\partial_w. \end{aligned}$$

Nalezněme vzhledem k těmto polím privilegované souřadnice  $(j, k, l, m)$  v bodě  $p = (\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3})$ . Dosazením bodu do koeficientů těchto vektorových polí získáme matici  $A$ :

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & 0 & \frac{4}{9} & -\frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{8} & -1 & \frac{7}{6} \\ -\frac{1}{6} & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{2}{9} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

takže dostáváme transformaci souřadnic

$$\begin{pmatrix} j \\ k \\ l \\ m \end{pmatrix} = A^{-1T} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2304}{1969} & \frac{24624}{1969} & \frac{306}{1969} & -\frac{216}{179} \\ -\frac{816}{1969} & -\frac{9000}{1969} & -\frac{630}{1969} & \frac{192}{179} \\ \frac{156}{1969} & -\frac{14958}{1969} & \frac{3609}{1969} & \frac{179}{216} \\ \frac{459}{1969} & \frac{13923}{1969} & \frac{7876}{15752} & -\frac{179}{108} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}.$$



Dále naše úvahy zobecníme na hladkou varietu spolu s distribucí. Mějme tedy  $k$  diferencovatelných vektorových polí  $X_1, \dots, X_k$  na varietě  $M$  dimenze  $n$ , přičemž  $k < n$ . Tato vektorová pole přiřadí každému bodu  $p \in M$   $k$ -dimenzionální podprostor  $\mathcal{D}_p$  prostoru  $T_p M$  takový, že  $\mathcal{D}_p \subset T_p M$  a  $k < n$ , tedy dostaneme distribuci. Potřebujeme doplnit bázi  $TM$  pomocí dalších  $n - k$  vektorových polí na  $M$ , abychom mohli použít předchozí úvahy. Tato vektorová pole můžeme nalézt pomocí operátoru Lieovy závorky  $[\cdot, \cdot]$ . V případě, že pomocí Lieovy závorky  $[\cdot, \cdot]$  dostaneme celé  $TM$ , pak k nalezení privilegovaných souřadnic můžeme využít rovnic (2),(3),(4) a jejich důsledků.

**Příklad 4.2.** Mějme hladkou varietu  $M$  dimenze 5, na varietě  $M$  mějme souřadnice  $(x, y, z, v, w)$  a vektorová pole

$$\begin{aligned} X_1 &= \partial_x + y\partial_y - v\partial_z - z\partial_v, \\ X_2 &= \partial_x - x\partial_y - z\partial_z + v\partial_v, \\ X_3 &= \partial_x + w\partial_y + y\partial_z + v\partial_w, \\ X_4 &= \partial_y - z\partial_x + v\partial_z + w\partial_v. \end{aligned}$$

Nalezněme privilegované souřadnice  $(j, k, l, m, n)$  vzhledem k polím  $X_1, X_2, X_3, X_4$  v bodě  $p = (1, 1, 2, 1, 1)$ .

Protože  $k = 4 < 5 = n$  pro algoritmus nalezení privilegovaných souřadnic vybereme tedy z Philip Hallovy báze ještě jedno vektorové pole  $X_5$ . Položme proto například

$$X_5 := [X_1, X_2] = (-1 + x)\partial_y + 2v\partial_z - 2z\partial_v$$

a spočteme matici koeficientů  $A = [a_{ij}(p)]$ . Vidíme, že matice  $A$  je pro tuto volbu invertibilní.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Podle rovnice (5) vypočteme transformaci souřadnic jako

$$\begin{pmatrix} j \\ k \\ l \\ m \\ n \end{pmatrix} = A^{-1T} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \\ -1 & -\frac{5}{7} & -\frac{6}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{18}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{7} & -\frac{4}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{12}{7} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{7} & -\frac{3}{14} & -\frac{5}{14} & \frac{8}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ v \\ w \end{pmatrix}.$$

Abychom demonstrovali, že se jedná o privilegované souřadnice, derivujme funkce několika souřadnic ve směru původních vektorových polí. Například

$$\begin{aligned} X_1(j) &= 0 + y\frac{3}{7} - v\left(-\frac{2}{7}\right) - z\left(-\frac{1}{7}\right), \\ X_1(m) &= -1 + w\left(-\frac{1}{7}\right) + y\left(-\frac{4}{7}\right) + v\frac{12}{7}, \\ &\vdots \\ X_5(w) &= (-1 + x)\left(-\frac{3}{7}\right) + 2v\left(-\frac{3}{14}\right) - 2z\left(-\frac{5}{14}\right) \end{aligned}$$

a vidíme, že po dosazení bodu  $p$  tato transformace splňuje podmínky (3)

$$\begin{aligned} X_1(j)|_p &= 1, \\ X_1(m)|_p &= 0, \\ &\vdots \\ X_5(w)|_p &= 1. \end{aligned}$$

V předchozím příkladě jsme ukázali jak nalézt transformační funkce mezi souřadnicemi  $(x_1, \dots, x_k) \mapsto (y_1, \dots, y_k)$ , nyní ukážeme jak nalézt transformace mezi parciálními derivacemi  $(\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_k}) \mapsto (\partial_{y_1}, \dots, \partial_{y_k})$ . Potom vyjádříme vektorová pole  $X_1, \dots, X_n$  v nových souřadnicích  $(y_1, \dots, y_k)$ . Všimněme si, že z rovnic (2) a (3) plyne

$$\begin{pmatrix} \partial_{x_1} \\ \vdots \\ \partial_{x_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}(p) & \dots & a_{1,k}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k,1}(p) & \dots & a_{k,k}(p) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \partial_{y_1} \\ \vdots \\ \partial_{y_k} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Označme prvky matice  $A^{-1} = [b_{i,j}]$ , prvky matice  $A$  budeme značit jako v předchozím případě  $A = [a_{i,j}]$ . Pak lze vyjádřit tyto transformační vztahy pro parciální derivace jako

$$\partial_{x_i} = \begin{pmatrix} b_{i,1} & \dots & b_{i,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_{y_1} \\ \vdots \\ \partial_{y_n} \end{pmatrix} =: \omega_i(\partial_{y_1}, \dots, \partial_{y_n})$$

a dále transformační vztahy pro souřadnice

$$x_i = \begin{pmatrix} a_{i,1} & \dots & a_{i,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} =: f_i(y_1, \dots, y_n).$$

Pak pole  $X_1, \dots, X_n$  můžeme psát jako

$$X_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j}(f_1(y_1, \dots, y_n), \dots, f_n(y_1, \dots, y_n)) \omega_j(\partial_{y_1}, \dots, \partial_{y_n})$$

kde  $a_{i,j}$  jsou koeficienty vektorových polí,  $f_i$  jsou funkce transformace souřadnic a  $\omega_i$  je transformace báze  $\langle X_1, \dots, X_n \rangle$ .

## 4.2 Nilpotentní aproximace

Poznamenejme, že privilegované souřadnice odpovídající polím vzniklých aplikací Lieovy závorky polí z distribuce můžeme v jistém smyslu chápat jako souřadnice vyšších řádů. Po nalezení privilegovaných souřadnic je dalším krokem nilpotentní aproximace. Dává smysl aproximovat koeficienty všech vektorových polí z příkladu 4.2 váhovaným Taylorovým polynomem stupně 2. V našem případě použijeme k výpočtu výpočetní systém *Maple Software* a jeho příkaz *mtaylor*. Použití této aproximace demonstrujeme na následujícím příkladu.

**Příklad 4.3.** Mějme hladkou varietu  $M$ , souřadnice  $(x, y, z, v)$  a vektorová pole  $X_1, X_2, X_3$ . Spočtěme privilegované souřadnice  $(j, k, l, m)$  vzhledem k těmto polím v bodě  $p = (1, 2, 3, 2)$  a provedme váhovanou aproximaci koeficientů těchto polí.

$$\begin{aligned}X_1 &= \sqrt{y}\partial_y, \\X_2 &= z^2\partial_x + \partial_v, \\X_3 &= \partial_z + z\partial_v, \\[X_2, X_3] &= -2z\partial_x\end{aligned}$$

Dosazením bodu  $p$  do koeficientů těchto polí dostaneme matici  $A = [a_{ij}]$ :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ -6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pak dostáváme transformaci vektorových polí

$$\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \\ \partial_v \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \partial_j \\ \partial_k \\ \partial_l \\ \partial_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ -6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_j \\ \partial_k \\ \partial_l \\ \partial_m \end{pmatrix}$$

a transformaci souřadnic

$$\begin{pmatrix} j \\ k \\ l \\ m \end{pmatrix} = (A^{-1})^T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{6} & 0 & -\frac{9}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ v \end{pmatrix}$$

neboli

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ v \end{pmatrix} = A^T \begin{pmatrix} j \\ k \\ l \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 0 & -6 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j \\ k \\ l \\ m \end{pmatrix}.$$

Nyní aproximujme koeficienty  $a_{ij}$  vektorových polí v souřadnicích  $(j, k, l, m)$  pomocí Taylorova rozvoje.

$$\sqrt{y} = \sqrt{\sqrt{2}j} \xrightarrow{\text{Taylor}} \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}j,$$

$$z^2 = l^2 \xrightarrow{\text{Taylor}} -9 + 6l,$$

$$z = l \xrightarrow{\text{Taylor}} l,$$

$$-2z = -2l \xrightarrow{\text{Taylor}} -2l.$$

Vyjádření vektorových polí  $X_1, X_2, X_3, [X_2, X_3]$  v nových souřadnicích je tedy

$$X_1 = \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}j \right) (9\partial_j + \partial_m),$$

$$X_2 = (-9 + 6l) \left( \frac{\sqrt{2}}{2}\partial_k \right) - 6\partial_j,$$

$$X_3 = \partial_l + 3\partial_m - 6l\partial_j,$$

$$[X_2, X_3] = -2\sqrt{2}l\partial_k.$$

**Příklad 4.4.** Mějme hladkou varietu  $M$ , souřadnice  $(x, y, z)$  a vektorová pole  $X_1, X_2$ . Spočtěme privilegované souřadnice vzhledem k těmto polím v bodě  $p = (0, 1, 2)$  a provedme aproximaci koeficientů těchto polí.

$$\begin{aligned} X_1 &= y^2 \partial_x + (x+1) \partial_z, \\ X_2 &= (x+z) \partial_y, \\ [X_1, X_2] &= -2(x+z)y \partial_x + (y^2 + x+1) \partial_y. \end{aligned}$$

Privilegované souřadnice tedy budou následující:

$$\begin{pmatrix} j \\ k \\ l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{8} \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Hledejme inverzní transformace  $x = f_1^{-1}(j, k, l), y = f_2^{-1}(j, k, l), z = f_3^{-1}(j, k, l)$ :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j \\ k \\ l \end{pmatrix}.$$

Následným použitím aproximace dostaneme tyto vztahy

$$\begin{aligned} y^2 &= (2k+3l)^2 = 4k^2 + 12kl + l^2 \xrightarrow{\text{Taylor}} 2 + 4k, \\ x+1 &= j-4l+1 \xrightarrow{\text{Taylor}} j-1, \\ x+z &= 2j-4l \xrightarrow{\text{Taylor}} 2j-2, \\ -2(x+z)y &= -2(2j-4l)(2k+3l) = -8jk + 16kl - 12jl + 24l^2 \xrightarrow{\text{Taylor}} 2 - 8k - 4j, \\ y^2 + x+1 &= (2k+3l)^2 + j-4l+1 = 4k^2 + 12kl + l^2 + j-4l+1 \xrightarrow{\text{Taylor}} 1 + 4k + j. \end{aligned}$$

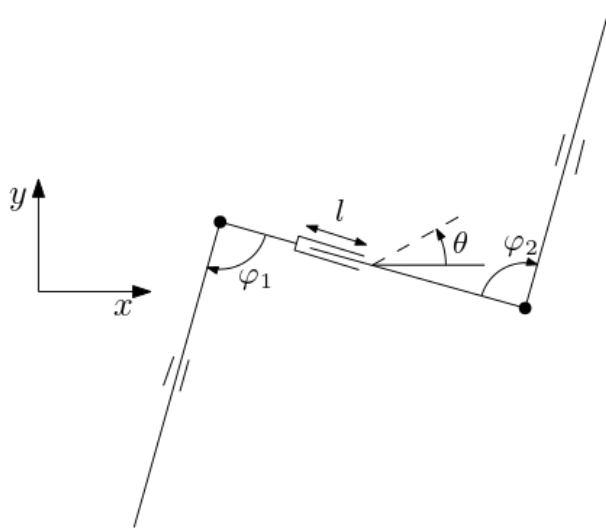
Pak vektorová pole  $X_1, X_2, [X_1, X_2]$  jsou tvaru

$$\begin{aligned} X_1 &= (2+4k) \left( \frac{3}{8} \partial_k - \frac{1}{4} \partial_l \right) + (j-1) \left( \partial_j - \frac{3}{8} \partial_k + \frac{1}{4} \partial_l \right) \\ &= \frac{3}{4} \partial_k + \frac{3}{2} k \partial_k - \frac{1}{2} \partial_l - k \partial_l + j \partial_j - \partial_j - \frac{3}{8} j \partial_k + \frac{3}{8} \partial_k + \frac{1}{4} j \partial_l - \frac{1}{4} \partial_l \\ &= (j-1) \partial_j + \left( -\frac{3}{8} j + \frac{3}{2} k + \frac{9}{8} \right) \partial_k + \left( \frac{1}{4} j - k - \frac{3}{4} \right) \partial_l, \\ X_2 &= (j-1) \partial_k, \\ [X_1, X_2] &= (2-8k-4j) \left( \frac{3}{8} \partial_k - \frac{1}{4} \partial_l \right) + \left( \frac{1}{2} + 2k + \frac{1}{2} j \right) \partial_k \\ &= \frac{6}{8} \partial_k - 3k \partial_k - \frac{3}{2} j \partial_k - \frac{1}{2} \partial_l + 2k \partial_l + j \partial_l + \frac{1}{2} \partial_k + 2k \partial_k + \frac{1}{2} j \partial_k \\ &= \left( -j - k + \frac{10}{8} \right) \partial_k + \left( j + 2k - \frac{1}{2} \right) \partial_l. \end{aligned}$$

### 4.3 Další mechanismy

V této podkapitole ukážeme několik příkladů aplikací vybudovaného aparátu na planární mechanismy.

**Příklad 4.5.** Uvažujme mechanismus tříčlánekového hada[3]. Neholonomní vazby budou reprezentovat kolečka umístěná uprostřed prvního a třetího článku. Druhý článek může měnit svojí délku. Články budou mezi sebou spojeny servomotory viz Obrázek 3. Popis souřadnic odpovídá varietě  $M = (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^1)$ .



Obrázek 3: Schématické znázornění uvažovaného tříčlánekového hada

Prvně určíme kinematické řetězce dvou neholonomních vazeb vzhledem ke středu druhého článku hada.

$$\begin{aligned} x_1 &= x - \frac{l}{2} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{L_1}{2} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4} + \varphi_1\right), \\ y_1 &= y - \frac{l}{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{L_1}{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4} + \varphi_1\right), \\ x_2 &= x + \frac{l}{2} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{L_2}{2} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4} + \varphi_2\right), \\ y_2 &= y + \frac{l}{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{L_2}{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4} + \varphi_2\right). \end{aligned}$$

Derivováním podle proměnné  $t$  dostaneme vektory rychlosti vazeb.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{x} - \frac{l}{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \dot{\theta} - \frac{1}{2} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \dot{l} + \frac{L_1}{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4} + \varphi_1\right) (\dot{\theta} + \dot{\varphi}_1), \\ \dot{y}_1 &= \dot{y} - \frac{l}{2} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \dot{\theta} - \frac{1}{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \dot{l} - \frac{L_1}{2} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4} + \varphi_1\right) (\dot{\theta} + \dot{\varphi}_1), \\ \dot{x}_2 &= \dot{x} - \frac{l}{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \dot{\theta} + \frac{1}{2} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \dot{l} - \frac{L_2}{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4} + \varphi_2\right) (\dot{\theta} + \dot{\varphi}_2), \\ \dot{y}_2 &= \dot{y} + \frac{l}{2} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \dot{\theta} + \frac{1}{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \dot{l} + \frac{L_2}{2} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4} + \varphi_2\right) (\dot{\theta} + \dot{\varphi}_2). \end{aligned}$$

Normálové vektory vazeb mají toto vyjádření:

$$\begin{aligned}\vec{n}_1 &= \left( \cos \left( \theta + \frac{\pi}{4} + \varphi_1 \right), -\sin \left( \theta + \frac{\pi}{4} + \varphi_1 \right) \right), \\ \vec{n}_2 &= \left( \cos \left( \theta + \frac{\pi}{4} + \varphi_2 \right), -\sin \left( \theta + \frac{\pi}{4} + \varphi_2 \right) \right).\end{aligned}$$

Vynásobením vektorů rychlosti a normálových vektorů vazeb získáme soustavu dvou neholonomních podmínek:

$$\begin{aligned}& \cos \left( \theta + \frac{\pi}{4} + \varphi_1 \right) \dot{x} - \sin \left( \theta + \frac{\pi}{4} + \varphi_1 \right) \dot{y} + \left( \frac{L_1}{2} \sin \left( 2\theta + \frac{\pi}{2} + 2\varphi_1 \right) \right. \\ & \left. + \frac{l}{2} \sin \left( 2\theta + \frac{\pi}{2} + \varphi_1 \right) \right) \dot{\theta} + \frac{L_1}{2} \sin \left( 2\theta + \frac{\pi}{2} + 2\varphi_1 \right) \dot{\varphi}_1 - \frac{1}{2} \cos \left( 2\theta + \frac{\pi}{2} + \varphi_1 \right) \dot{l} = 0, \\ & \cos \left( \theta + \frac{\pi}{4} + \varphi_2 \right) \dot{x} - \sin \left( \theta + \frac{\pi}{4} + \varphi_2 \right) \dot{y} - \left( \frac{L_2}{2} \sin \left( 2\theta + \frac{\pi}{2} + 2\varphi_2 \right) \right. \\ & \left. + \frac{l}{2} \sin \left( 2\theta + \frac{\pi}{2} + \varphi_2 \right) \right) \dot{\theta} - \frac{L_2}{2} \sin \left( 2\theta + \frac{\pi}{2} + 2\varphi_2 \right) \dot{\varphi}_2 + \frac{1}{2} \cos \left( 2\theta + \frac{\pi}{2} + \varphi_2 \right) \dot{l} = 0.\end{aligned}$$

Řešením tohoto systému jsou čtyři vektorová pole

$$\begin{aligned}X_1 &= \partial_x + \frac{2 \cos \left( \theta + \frac{\pi}{4} + \varphi_1 \right)}{L_1 \sin \left( 2\theta + \frac{\pi}{2} + \varphi_1 \right)} \partial_{\varphi_1} - \frac{2 \cos \left( \theta + \frac{\pi}{4} + \varphi_2 \right)}{L_2 \sin \left( 2\theta + \frac{\pi}{2} + \varphi_2 \right)} \partial_{\varphi_2}, \\ X_2 &= \partial_y - \frac{2 \sin \left( \theta + \frac{\pi}{4} + \varphi_1 \right)}{L_1 \sin \left( 2\theta + \frac{\pi}{2} + \varphi_1 \right)} \partial_{\varphi_1} + \frac{2 \sin \left( \theta + \frac{\pi}{4} + \varphi_2 \right)}{L_2 \sin \left( 2\theta + \frac{\pi}{2} + \varphi_2 \right)} \partial_{\varphi_2}, \\ X_3 &= \partial_\theta + \frac{L_1 \sin \left( 2\theta + \frac{\pi}{2} + 2\varphi_1 \right) + l \sin \left( \theta + \frac{\pi}{2} + \varphi_1 \right)}{\sin \left( 2\theta + \frac{\pi}{2} + 2\varphi_1 \right) L_1} \partial_{\varphi_1} \\ &+ \frac{L_2 \sin \left( 2\theta + \frac{\pi}{2} + 2\varphi_2 \right) + l \sin \left( \theta + \frac{\pi}{2} + \varphi_2 \right)}{\sin \left( 2\theta + \frac{\pi}{2} + 2\varphi_2 \right) L_2} \partial_{\varphi_2}, \\ X_4 &= \partial_l - \frac{\cos \left( \theta + \frac{\pi}{2} + \varphi_1 \right)}{L_1 \sin \left( 2\theta + \frac{\pi}{2} + \varphi_1 \right)} \partial_{\varphi_1} - \frac{\cos \left( \theta + \frac{\pi}{2} + \varphi_2 \right)}{L_2 \sin \left( 2\theta + \frac{\pi}{2} + \varphi_2 \right)} \partial_{\varphi_2},\end{aligned}$$

a spočtěme jejich závorky

$$\begin{aligned}X_{12} &= [X_1, X_2] = \frac{4}{\cos^2 \left( \frac{\pi}{2} \right) - 1} \partial_{\varphi_1} + \frac{4}{\cos^2 \left( \frac{\pi}{2} \right) - 1} \partial_{\varphi_2}, \\ X_{24} &= [X_2, X_4] = \frac{2 \sin \left( -\frac{\pi}{4} \right)}{\cos^2 \left( \frac{\pi}{2} \right) - 1} \partial_{\varphi_1} - \frac{2 \sin \left( -\frac{\pi}{4} \right)}{\cos^2 \left( \frac{\pi}{2} \right) - 1} \partial_{\varphi_2}.\end{aligned}$$

Všimněme si, že tato distribuce zřejmě není nilpotentní. Proto spočtěme privilegované souřadnice a k nim odpovídající transformaci souřadnic v bodě  $p = (x, y, \theta, l, \varphi_1, \varphi_2) = (0, 0, 0, 1, 0, 0)$ .

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ \theta \\ l \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = A^T \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ \theta_2 \\ l_2 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ \theta_2 \\ l_2 \\ \sqrt{2}x_2 - \sqrt{2}y_2 + 2\theta - 4\psi_1 + \sqrt{2}\psi_2 \\ -\sqrt{2}x_2 + \sqrt{2}y_2 + 2\theta - 4\psi_1 - \sqrt{2}\psi_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_\theta \\ \partial_l \\ \partial_{\varphi_1} \\ \partial_{\varphi_2} \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} \partial_{x_2} \\ \partial_{y_2} \\ \partial_{\theta_2} \\ \partial_{l_2} \\ \partial_{\psi_1} \\ \partial_{\psi_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_{x_2} - \partial_{\psi_2} \\ \partial_{y_2} + \partial_{\psi_2} \\ \partial_{\theta_2} + \frac{1}{2}\partial_{\psi_1} \\ \partial_{l_2} \\ -\frac{1}{8}\partial_{\psi_1} + \frac{\sqrt{2}}{4}\partial_{\psi_2} \\ -\frac{1}{8}\partial_{\psi_1} - \frac{\sqrt{2}}{4}\partial_{\psi_2} \end{pmatrix}.$$

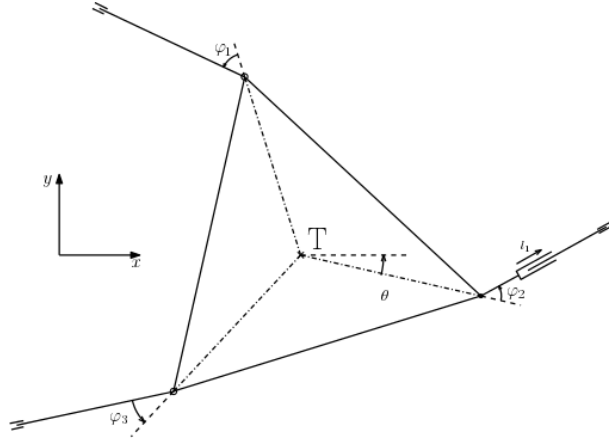
Vyjádřeme vektorová pole  $X_1, X_2, X_3, X_4, X_{12}, X_{24}$  v nových souřadnicích a aproximujme jejich koeficienty váhovaným Taylorovým polynomem v bodě  $q_0 = (x_2, y_2, \theta_2, l_2, \psi_1, \psi_2) = (0, 0, 0, 1, 0, 0)$ .

$$\begin{aligned} X_1 &= \partial_{x_2} + \left( \frac{3}{2}\theta_2 + \frac{y_2 - x_2}{16} \right) \partial_{\psi_1} + \left( 3\sqrt{2}\theta_2 + \frac{\sqrt{2}(x_2 - y_2)}{8} - 1 \right) \partial_{\psi_2}, \\ X_2 &= \partial_{y_2} + \left( \frac{1}{2} - \frac{\theta_2}{8} + \frac{y_2}{16} - \frac{x_2}{16} \right) \partial_{\psi_1} + \left( \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\theta_2 + \frac{\sqrt{2}(x_2 - y_2)}{8} + 1 \right) \partial_{\psi_2}, \\ X_3 &= \partial_{\theta_2} + \left( \frac{l_2 - 1}{32} + \frac{1}{2} \right) \partial_{\psi_1} + \left( \frac{\sqrt{2}1 - l_2}{16} \right) \partial_{\psi_2}, \\ X_4 &= \partial_{l_2} + \left( \frac{y_2 - x_2}{8} + \frac{3\theta_2}{32} \right) \partial_{\psi_1} + \left( \frac{\sqrt{2}(y_2 - x_2)}{8} - \frac{3\sqrt{2}\theta_2}{16} \right) \partial_{\psi_2}, \\ X_{12} &= -\frac{1}{8}\partial_{\psi_1} + \frac{\sqrt{2}}{4}\partial_{\psi_2}, \\ X_{14} &= -\frac{1}{8}\partial_{\psi_1} - \frac{\sqrt{2}}{4}\partial_{\psi_2}. \end{aligned}$$

Množina těchto šesti vektorových polí tvoří spolu s operací Lieovy závorky Lieovu algebru s následující multiplikativní tabulkou.

$[\cdot, \cdot]$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_{12}$	$X_{14}$
$X_1$	0	$X_{12}$	$-3X_{14}$	$X_{14}$	0	0
$X_2$	$-X_{12}$	0	$3X_{14}$	$-X_{14}$	0	0
$X_3$	$3X_{14}$	$-3X_{14}$	0	$-\frac{1}{2}X_{12}$	0	0
$X_4$	$-X_{14}$	$X_{14}$	$\frac{1}{2}X_{12}$	0	0	0
$X_{12}$	0	0	0	0	0	0
$X_{14}$	0	0	0	0	0	0

**Příklad 4.6.** Uvažujme planární mechanismus typu *Trident*[4]. Předpokládejme, že robot je vybaven třemi rotačními klouby, které spojují ramena tridentu s jeho trojúhelníkovým tělem. Navíc bude mít jedno prodlužovací rameno.



Obrázek 4: Schématické znázornění uvažovaného trident mechanismu

Mějme varietu  $M = \{(x, y, l, \theta, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^4\}$  dimenze 7. Uvažujme nyní vektorová pole, která jsou řešením neholonomního systému tohoto robota:

$$\begin{aligned} X_1 &= \partial_x + \frac{1}{l} \sin(\theta + \alpha_1 + \varphi_1) \partial_{\varphi_1} + \sin(\theta + \alpha_2 + \varphi_2) \partial_{\varphi_2} + \sin(\theta + \alpha_3 + \varphi_3) \partial_{\varphi_3}, \\ X_2 &= \partial_y - \frac{1}{l} \cos(\theta + \alpha_1 + \varphi_1) \partial_{\varphi_1} - \cos(\theta + \alpha_2 + \varphi_2) \partial_{\varphi_2} - \cos(\theta + \alpha_3 + \varphi_3) \partial_{\varphi_3}, \\ X_3 &= \partial_l, \\ X_4 &= \partial_\theta - \frac{1}{l} (l + \cos(\varphi_1)) \partial_{\varphi_1} - (1 + \cos(\varphi_2)) \partial_{\varphi_2} - (1 + \cos(\varphi_3)) \partial_{\varphi_3}, \end{aligned}$$

kde  $\alpha_1 = -\frac{2}{3}\pi$ ,  $\alpha_2 = 0$  a  $\alpha_3 = \frac{2}{3}\pi$  jsou konstanty. Spočtěme nilpotentní aproximaci těchto polí v bodě  $p = (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$ , a provedme jejich nilpotentní aproximaci. Následně po vyjádření polí v nových privilegovaných souřadnicích sestavme multiplikativní tabulku Lieovy algebry na distribuci  $\mathcal{D}$ . Proto uvažujme například:

$$\begin{aligned} X_{12} &=: [X_1, X_2] = \left(\frac{1}{l}\right)^2 \partial_{\varphi_1} + \partial_{\varphi_2} + \partial_{\varphi_3}, \\ X_{14} &=: [X_1, X_4] = \left[ \left(\frac{1}{l}\right)^2 \cos(\theta + \alpha_1) + \frac{1}{l} \cos(\theta + \alpha_1 + \varphi_1) \right] \partial_{\varphi_1} \\ &\quad + [\cos(\theta + \alpha_2) + \cos(\theta + \alpha_2 + \varphi_2)] \partial_{\varphi_2} \\ &\quad + [\cos(\theta + \alpha_3) + \cos(\theta + \alpha_3 + \varphi_3)] \partial_{\varphi_3}, \\ X_{24} &=: [X_2, X_4] = \left[ \left(\frac{1}{l}\right)^2 \sin(\theta + \alpha_1) + \frac{1}{l} \sin(\theta + \alpha_1 + \varphi_1) \right] \partial_{\varphi_1} \\ &\quad + [\sin(\theta + \alpha_2) + \sin(\theta + \alpha_2 + \varphi_2)] \partial_{\varphi_2} \\ &\quad + [\sin(\theta + \alpha_3) + \sin(\theta + \alpha_3 + \varphi_3)] \partial_{\varphi_3}. \end{aligned}$$



Spočítejme matici  $A = [a_{ij}(p)]$  v bodě  $p$  :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Označme nové privilegované souřadnice jako  $(x_2, y_2, l_2, \theta_2, \psi_1, \psi_2, \psi_3)$ . Spočítejme je jako

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ l \\ \theta \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} = A^T \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ l_2 \\ \theta_2 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -2 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -2 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ l_2 \\ \theta_2 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix}$$

a pro parciální derivace dostaneme

$$\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_l \\ \partial_\theta \\ \partial_{\varphi_1} \\ \partial_{\varphi_2} \\ \partial_{\varphi_3} \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} \partial_{x_2} \\ \partial_{y_2} \\ \partial_{l_2} \\ \partial_{\theta_2} \\ \partial_{\psi_1} \\ \partial_{\psi_2} \\ \partial_{\psi_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_{x_2} \\ \partial_{y_2} \\ \partial_{l_2} \\ \partial_{\theta_2} \\ \partial_{\psi_1} \\ \partial_{\psi_2} \\ \partial_{\psi_3} \end{pmatrix}.$$

Nyní již můžeme vyjádřit vektorová pole  $X_1, X_2, X_3, X_4, X_{12}, X_{14}, X_{24}$  v souřadnicích  $(x_2, y_2, l_2, \theta_2, \psi_1, \psi_2, \psi_3)$ .

$$\begin{aligned} X_1 &= \partial_{x_2} - \partial_{\psi_3} \\ &\quad - \frac{\sin(\theta_2 + \frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}x_2 - \frac{1}{2}y_2 - \psi_1 + \frac{1}{2}\psi_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\psi_3)}{l_2} \left( \frac{1}{3}\partial_{\psi_1} - \frac{1}{3}\partial_{\psi_2} - \frac{\sqrt{3}}{3}\partial_{\psi_3} \right) \\ &\quad + \sin(-\theta_2 - y_2 + \psi_1 + \psi_2) \left( \frac{1}{3}\partial_{\psi_1} + \frac{2}{3}\partial_{\psi_2} \right) \\ &\quad + \sin\left(-\theta_2 + \frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}x_2 + \frac{1}{2}y_2 + \psi_1 - \frac{1}{2}\psi_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\psi_3\right) \left( \frac{1}{3}\partial_{\psi_1} - \frac{1}{3}\partial_{\psi_2} + \frac{\sqrt{3}}{3}\partial_{\psi_3} \right), \\ X_2 &= \partial_{y_2} + \partial_{\psi_2} \\ &\quad - \frac{\cos(\theta_2 + \frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}x_2 - \frac{1}{2}y_2 - \psi_1 + \frac{1}{2}\psi_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\psi_3)}{l_2} \left( \frac{1}{3}\partial_{\psi_1} - \frac{1}{3}\partial_{\psi_2} - \frac{\sqrt{3}}{3}\partial_{\psi_3} \right) \\ &\quad - \cos(-\theta_2 - y_2 + \psi_1 + \psi_2) \left( \frac{1}{3}\partial_{\psi_1} + \frac{2}{3}\partial_{\psi_2} \right) \\ &\quad - \cos\left(-\theta_2 + \frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}x_2 + \frac{1}{2}y_2 + \psi_1 - \frac{1}{2}\psi_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\psi_3\right) \left( \frac{1}{3}\partial_{\psi_1} - \frac{1}{3}\partial_{\psi_2} + \frac{\sqrt{3}}{3}\partial_{\psi_3} \right), \\ X_3 &= \partial_{l_2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_4 &= \partial_{\theta_2} + 2\partial_{\psi_1} \\
&\quad - \frac{\theta_2 + \cos(-\frac{\sqrt{3}}{2}x_2 + \frac{1}{2}y_2 - 2\theta_2 + \psi_1 - \frac{1}{2}\psi_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\psi_3)}{\theta_2} \left( \frac{1}{3}\partial_{\psi_1} - \frac{1}{3}\partial_{\psi_2} - \frac{\sqrt{3}}{3}\partial_{\psi_3} \right) \\
&\quad - (1 + \cos(-2\theta_2 - y_2 + \psi_1 + \psi_2)) \left( \frac{1}{3}\partial_{\psi_1} + \frac{2}{3}\partial_{\psi_2} \right) \\
&\quad - \left( 1 + \cos \left( -2\theta_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_2 + \frac{1}{2}y_2 + \psi_1 - \frac{1}{2}\psi_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\psi_3 \right) \right) \left( \frac{1}{3}\partial_{\psi_1} - \frac{1}{3}\partial_{\psi_2} + \frac{\sqrt{3}}{3}\partial_{\psi_3} \right), \\
X_{12} &= -\frac{1}{l_2^2} \left( \frac{1}{3}\partial_{\psi_1} - \frac{1}{3}\partial_{\psi_2} - \frac{\sqrt{3}}{3}\partial_{\psi_3} \right) + \left( \frac{1}{3}\partial_{\psi_1} + \frac{2}{3}\partial_{\psi_2} \right) + \left( \frac{1}{3}\partial_{\psi_1} - \frac{1}{3}\partial_{\psi_2} + \frac{\sqrt{3}}{3}\partial_{\psi_3} \right), \\
X_{14} &= -\frac{\cos(-\theta_2 + \frac{2\pi}{3})}{l_2^2} \left( \frac{1}{3}\partial_{\psi_1} - \frac{1}{3}\partial_{\psi_2} - \frac{\sqrt{3}}{3}\partial_{\psi_3} \right) + \cos(\theta_2) \left( \frac{1}{3}\partial_{\psi_1} + \frac{2}{3}\partial_{\psi_2} \right) \\
&\quad + \cos \left( \theta_2 + \frac{2\pi}{3} \right) \left( \frac{1}{3}\partial_{\psi_1} - \frac{1}{3}\partial_{\psi_2} + \frac{\sqrt{3}}{3}\partial_{\psi_3} \right), \\
X_{24} &= -\frac{\sin(-\theta_2 + \frac{2\pi}{3})}{l_2^2} \left( \frac{1}{3}\partial_{\psi_1} - \frac{1}{3}\partial_{\psi_2} - \frac{\sqrt{3}}{3}\partial_{\psi_3} \right) + \sin(\theta_2) \left( \frac{1}{3}\partial_{\psi_1} + \frac{2}{3}\partial_{\psi_2} \right) \\
&\quad + \sin \left( \theta_2 + \frac{2\pi}{3} \right) \left( \frac{1}{3}\partial_{\psi_1} - \frac{1}{3}\partial_{\psi_2} + \frac{\sqrt{3}}{3}\partial_{\psi_3} \right).
\end{aligned}$$

Nyní provedeme aproximaci váhovaným Taylorovým polynomem. Připomeňme, že bod  $p = (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$  se transformací zobrazí na bod  $q = (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$ .

$$\begin{aligned}
X_1 &= \partial_{x_2} - \partial_{\psi_3} \\
&\quad \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\theta_2 + \frac{\sqrt{3}}{4}x_2 - \frac{1}{4}y_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}(l_2 - 1) \right) \left( \frac{1}{3}\partial_{\psi_1} - \frac{1}{3}\partial_{\psi_2} - \frac{\sqrt{3}}{3}\partial_{\psi_3} \right) \\
&\quad - (\theta_2 + y_2) \left( \frac{1}{3}\partial_{\psi_1} + \frac{2}{3}\partial_{\psi_2} \right) \\
&\quad - \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}x_2 + \frac{1}{4}y_2 - \frac{1}{2}\theta_2 \right) \left( \frac{1}{3}\partial_{\psi_1} - \frac{1}{3}\partial_{\psi_2} + \frac{\sqrt{3}}{3}\partial_{\psi_3} \right), \\
X_2 &= \partial_{y_2} + \frac{1}{3}\partial_{\psi_2} \\
&\quad \left( 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\theta_2 + \frac{3}{4}x_2 - \frac{\sqrt{3}}{4}y_2 - \frac{1}{2}l_2 \right) \left( \frac{1}{3}\partial_{\psi_1} - \frac{1}{3}\partial_{\psi_2} - \frac{\sqrt{3}}{3}\partial_{\psi_3} \right) - \frac{1}{3}\partial_{\psi_1} \\
&\quad - \left( -\frac{1}{2} - \frac{3}{4}x_2 - \frac{\sqrt{3}}{4}y_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\theta_2 \right) \left( \frac{1}{3}\partial_{\psi_1} - \frac{1}{3}\partial_{\psi_2} + \frac{\sqrt{3}}{3}\partial_{\psi_3} \right), \\
X_3 &= \partial_{l_2}, \\
X_4 &= \partial_{\theta_2} + \frac{2}{3}\partial_{\psi_1} - \frac{\theta_2 + 1}{\theta_2} \left( \frac{1}{3}\partial_{\psi_1} - \frac{1}{3}\partial_{\psi_2} - \frac{\sqrt{3}}{3}\partial_{\psi_3} \right) - \frac{2}{3}\partial_{\psi_2} - \frac{2\sqrt{3}}{3}\partial_{\psi_3}, \\
X_{12} &= [X_1, X_2] = \partial_{\psi_1}, \\
X_{13} &= [X_1, X_3] = -\frac{\sqrt{3}}{6}\partial_{\psi_1} + \frac{\sqrt{3}}{6}\partial_{\psi_2} + \frac{1}{2}\partial_{\psi_3}, \\
X_{14} &= [X_1, X_4] = \partial_{\psi_2}, \\
X_{23} &= [X_2, X_3] = \frac{1}{6}\partial_{\psi_1} - \frac{1}{6}\partial_{\psi_2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\partial_{\psi_3}, \\
X_{24} &= [X_2, X_4] = \partial_{\psi_3}, \\
X_{34} &= [X_3, X_4] = 0.
\end{aligned}$$

Všimněme si, že pole  $X_{13}, X_{23}$  jsou závislá na ostatních polích. Zřejmě tedy je výstupem algoritmu nilpotentní algebra. Nyní sestojíme multiplikativní tabulku této algebry,

$[\cdot, \cdot]$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_{12}$	$X_{14}$	$X_{24}$
$X_1$	0	$X_{12}$	$X_{13}$	$X_{14}$	0	0	0
$X_2$	$-X_{12}$	0	$X_{23}$	$X_{24}$	0	0	0
$X_3$	$-X_{13}$	$-X_{23}$	0	0	0	0	0
$X_4$	$-X_{14}$	$-X_{24}$	0	0	0	0	0
$X_{12}$	0	0	0	0	0	0	0
$X_{14}$	0	0	0	0	0	0	0
$X_{24}$	0	0	0	0	0	0	0

kde  $X_{13} = -\frac{\sqrt{3}}{6}X_{12} + \frac{\sqrt{3}}{6}X_{14} + \frac{1}{2}X_{24}$ ,  $X_{23} = \frac{1}{6}X_{12} - \frac{1}{6}X_{14} - \frac{\sqrt{3}}{6}X_{24}$ .

## 5 Heisenbergova geometrie

Vraťme se zpět k modelu Dubin's car. Připomeňme, že jeho řídicí algebru tvoří vektorová pole

$$\begin{aligned} V_1 &= \cos \theta \partial_x + \sin \theta \partial_y, \\ V_2 &= \partial_\theta, \\ V_{12} &= \sin \theta \partial_x - \cos \theta \partial_y, \end{aligned}$$

a jejich nilpotentní aproximace

$$\begin{aligned} V_1 &= \partial_{y_1} - y_2 \partial_{y_3}, \\ V_2 &= \partial_{y_2}, \\ V_{12} &= \partial_{y_3}, \end{aligned}$$

tvoří nilpotentní algebru s multiplikativní tabulkou

$[\cdot, \cdot]$	$V_1$	$V_2$	$V_{12}$
$V_1$	0	$V_{12}$	0
$V_2$	$-V_{12}$	0	0
$V_{12}$	0	0	0

Ukáže se, že tato nilpotentní algebra souvisí s Heisenbergovou algebrou, proto se nyní budeme zabývat rozbořem Heisenbergovy geometrie.

**Definice 5.1.** Heisenbergova grupa  $\mathbf{H}_3 = (\mathcal{M}_3, *)$  je množina horních trojúhelníkových matic tvaru

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

spolu s operací maticového násobení.

Bijekce  $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ,

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_3 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dává nekomutativní strukturu na  $\mathbb{R}^3$  s násobením

$$(x_1, x_2, x_3) \circ (x'_1, x'_2, x'_3) = (x_1 + x'_1, x_2 + x'_2, x_3 + x'_3 + x_1 x'_2),$$

nazývanou nesymetrická třídimenzionální Heisenbergova grupa.

Připomeňme, že násobením zleva na grupě  $(\mathbb{G}, \cdot)$ , která je vybavena strukturou hladké variety (Lieova grupa)

$$L_a : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{G}, L_a g = ag, \forall g \in \mathbb{G},$$

je diffeomorphismus s inverzí  $L_a^{-1} = L_{-a}$ .

**Definice 5.2.** Vektorové pole  $X = \sum_i X^i \partial_{x_i}$  je levoinvariantní na Lieově grupě  $\mathbb{G}$  pokud

$$X_a^i = X_a(x_i) = X_e(x_i \circ L_a),$$

kde  $x_i$  je  $i$ -tá souřadnice a  $X_e$  je vektorové pole  $X$  v počátku.

**Lemma 5.3.** *Mějme na varietě  $M = \mathbb{R}^3$  vektorová pole*

$$V_1 = \partial_{x_1}, \quad V_2 = \partial_{x_2} + x_1 \partial_{x_3}, \quad V_3 = \partial_{x_3}.$$

*Tato vektorová pole jsou levoinvariantní vzhledem k nekomutativní Heisenbergově grupě*

$$(x_1, x_2, x_3) \circ (x'_1, x'_2, x'_3) = (x_1 + x'_1, x_2 + x'_2, x_3 + x'_3 + x_1 x'_2).$$

*na  $\mathbb{R}^3$ .*

*Důkaz.* Násobením zleva prvkem  $a = (a_1, a_2, a_3)$  je definováno jako

$$L_a(x_1, x_2, x_3) = (a_1 + x_1, a_2 + x_2, a_3 + x_3 + a_1 x_2).$$

Nechť  $X$  je levoinvariantní vektorové pole. Potom  $\forall a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{G}$  můžeme psát  $X_a = \sum_i X_a^i \partial_{x_i}$ , tyto komponenty pak splňují

$$X_a^i = X_a(x_i) = X_e(x_i \circ L_a),$$

kde  $x_i$  je  $i$ -tá souřadnice a  $X_e$  je vektorové pole  $X$  v počátku. Nechť  $(b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{G}$ , potom

$$\begin{aligned} (x_1 \circ L_a)(b) &= x_1(L_a b) = x_1(ab) = a_1 + b_1 = x_1(a) + x_1(b), \\ (x_2 \circ L_a)(b) &= x_2(L_a b) = x_2(ab) = a_2 + b_2 = x_2(a) + x_2(b), \\ (x_3 \circ L_a)(b) &= x_3(L_a b) = x_3(ab) = a_3 + b_3 + a_1 b_2 = x_3(a) + x_3(b) + x_1(a)x_2(b). \end{aligned}$$

Vynecháním  $b$  dostáváme

$$\begin{aligned} (x_1 \circ L_a) &= x_1(a) + x_1, \\ (x_2 \circ L_a) &= x_2(a) + x_2, \\ (x_3 \circ L_a) &= x_3(a) + x_3 + x_1(a)x_2. \end{aligned}$$

Označme  $X_e = \xi^1 \partial_{x_1} + \xi^2 \partial_{x_2} + \xi^3 \partial_{x_3}$  vektorové pole  $X$  v počátku. Pak dostáváme

$$\begin{aligned} X_a^1 &= X_e(x_1(a) + x_1) = \xi^1, \\ X_a^2 &= X_e(x_2(a) + x_2) = \xi^2, \\ X_a^3 &= X_e(x_3(a) + x_3 + x_1(a)x_2) = \xi^3 + x_1(a)\xi^2, \end{aligned}$$

takže levoinvariantní vektorové pole  $X$  je dáno parametry  $\xi^i$

$$\begin{aligned} X &= \xi^1 \partial_{x_1} + \xi^2 \partial_{x_2} + (\xi^3 + x_1 \xi^2) \partial_{x_3} \\ &= \xi^1 \partial_{x_1} + \xi^2 (\partial_{x_2} + x_1 \partial_{x_3}) + \xi^3 \partial_{x_3} \\ &= \xi^1 V_1 + \xi^2 V_2 + \xi^3 V_3 \end{aligned}$$

a dostáváme tedy lineární kombinaci vektorových polí  $V_1, V_2, V_3$ .  $\square$

Pokud v předchozím lemmatu použijeme aproximovaná vektorová pole modelu Dubinova auta, tedy  $V_1 = \partial_x + \theta \partial_y$ ,  $V_2 = \partial_\theta$ , spolu s transformací  $x_1 := \theta$ ,  $x_2 := x$ ,  $x_3 := y$  dostaneme vektorová pole v tvrzení tohoto lemmatu. Na konfiguraci Dubinova auta tedy máme strukturu Heisenbergovy grupy.

*Poznámka.* Představme si nyní model valící se kuličky. Protože se kulička může valit kdykoliv ve všech směrech, není její dynamika omezena neholonomními podmínkami. Na konfiguraci takové kuličky pak máme grupovou strukturu Eukleidovské grupy  $\mathbf{E}_2$ .

Horizontální distribuce v případě Heisenbergovy grupy je definována jako

$$\mathcal{H} : x \rightarrow \mathcal{H}_x = \text{span}\{V_1, V_2\}$$

lineární kombinace dvou lineárně nezávislých vektorových polí. Vektorové pole  $V$  se nazývá horizontální právě tehdy, když  $V_x \in \mathcal{H}_x$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^3$ . Křivka  $c$  se nazývá horizontální pokud vektor  $\dot{c}$  je horizontální vektorové pole podél  $c$ .

**Příklad 5.4.** Křivka  $c = (x_1, x_2, x_3)$  je horizontální vzhledem k vektorovým polím  $V_1 = \partial_{x_1}$ ,  $V_2 = \partial_{x_2} + x_1 \partial_{x_3}$  právě tehdy, pokud

$$\dot{x}_3 = x_1 \dot{x}_2.$$

Vektor  $\dot{c}$  můžeme napsat jako

$$\begin{aligned} \dot{c} &= \dot{x}_1 \partial_{x_1} + \dot{x}_2 \partial_{x_2} + \dot{x}_3 \partial_{x_3} \\ &= \dot{x}_1 \partial_{x_1} + \dot{x}_2 (\partial_{x_2} - x_1 \partial_{x_3}) + x_1 \dot{x}_2 \partial_{x_3} + \dot{x}_3 \partial_{x_3} \\ &= \dot{x}_1 V_1 + \dot{x}_2 V_2 + (\dot{x}_3 - x_1 \dot{x}_2) \partial_{x_3}. \end{aligned}$$

Aby tato křivka byla horizontální musí být tato derivace lineární kombinací vektorových polí  $V_1, V_2$ . Proto musí platit rovnost  $\dot{x}_3 = x_1 \dot{x}_2$ .

**Věta 5.5.** Pokud  $c(s)$  je horizontální křivka, pak  $\bar{c}(s) = L_a c(s)$  je horizontální křivka pro všechny prvky  $a \in \mathbf{H}$  Heisenbergovy grupy  $\mathbf{H}$ .

*Důkaz.* Pro  $c = (c_1, c_2, c_3)$  a  $\bar{c} = (\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3)$  platí

$$\begin{aligned} \bar{c}_1 &= a_1 + c_1 \implies \dot{\bar{c}}_1 = \dot{c}_1 \\ \bar{c}_2 &= a_2 + c_2 \implies \dot{\bar{c}}_2 = \dot{c}_2 \\ \bar{c}_3 &= a_3 + c_3 + a_1 c_2 \implies \dot{\bar{c}}_3 = \dot{c}_3 + a_1 \dot{c}_2 \end{aligned}$$

Protože  $c$  je horizontální křivka, pak s využitím předchozího příkladu dostáváme

$$\begin{aligned} \dot{\bar{c}}_3 &= \dot{c}_3 + a_1 \dot{c}_2 \\ &= c_1 \dot{c}_2 + a_1 \dot{c}_2 \\ &= \dot{c}_2 (a_1 + c_1) \\ &= \dot{c}_2 \bar{c}_1 = \dot{\bar{c}}_2 \bar{c}_1, \end{aligned}$$

což s výsledky předchozího příkladu zaručuje, že křivka  $\bar{c}(s)$  je také horizontální.  $\square$

**Důsledek 5.6.** *Tečný vektor horizontální křivky  $\bar{c}(s) = L_a c(s)$  je*

$$\dot{\bar{c}}(s) = \dot{c}_1(s)V_1|_{\bar{c}(s)} + \dot{c}_2(s)V_2|_{\bar{c}(s)}.$$

*Důkaz.* Protože křivka  $\bar{c}(s)$  je horizontální z předchozích výsledků dostaneme

$$\begin{aligned}\dot{\bar{c}}(s) &= \dot{\bar{c}}_1(s)V_1|_{\bar{c}(s)} + \dot{\bar{c}}_2(s)V_2|_{\bar{c}(s)} \\ &= \dot{c}_1(s)V_1|_{\bar{c}(s)} + \dot{c}_1(s)V_1|_{\bar{c}(s)}.\end{aligned}$$

□

V této kapitole jsme tedy ukázali, že model Dubinova auta je lokálně říditelný v počátku. Vektorová pole tohoto řídicího systému jsou levoinvariantní vůči Heisenbergově grupě, tj. tato pole jsou jednoznačně definována v počátku a můžeme je posouvat násobením a tak lze auto řídit na celé varietě  $M$ . Toto násobení odpovídá například jízdě rovně vpřed.

## 6 Tanakovo prodloužení

V minulé kapitole jsme viděli viděli, že levé násobení na  $\mathbf{H}_3$  zachovává distribuci. V dalším popíšeme algoritmus, který nalezne další zobrazení, která zachovávají distribuci.

**Definice 6.1.** Gradovanou Lieovou algebrou nazveme takovou Lieovu algebru  $\mathfrak{g}$ , která je přímým součtem

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}^i,$$

splňující

$$[\mathfrak{g}^i, \mathfrak{g}^j] \subset \mathfrak{g}^{i+j}.$$

Nechť  $\mathfrak{m}_0 = \sum_{i=-k}^{-1} \mathfrak{g}^i + \mathfrak{g}^0$  je nekladná gradovaná Lieova algebra s operací Lieovy závorky  $[\cdot, \cdot]$ . V dalších úvahách budeme předpokládat, že negativní část  $\mathfrak{m} := \sum_{i=-k}^{-1} \mathfrak{g}^i$  algebry  $\mathfrak{m}_0$  je fundamentální, tj. generovaná částí  $\mathfrak{g}^{-1}$ . Definujme posloupnost vektorových prostorů  $\mathfrak{g}^r$  ( $r \geq 1$ ) takových, že  $\mathfrak{m}_f := \mathfrak{m} + \sum_{r=0}^f \mathfrak{g}^r$  ( $f \geq 0$ ),  $\mathfrak{g}^r \subset \mathfrak{gl}^r(\mathfrak{m}_{r-1})$ , kde  $\mathfrak{gl}^j(\mathfrak{m}) := \{A \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{m}), A(\mathfrak{m}_i) \subset \mathfrak{m}_{i+j}, \forall i \in \mathbb{Z}\}$ . Nechť

$$\mathfrak{g}^1 := \{A \in \mathfrak{gl}^1(\mathfrak{m}_0), A[x, y] = [A(x), y] + [x, A(y)], \quad \forall x, y \in \mathfrak{m}_0\},$$

dále předpokládejme, že  $\mathfrak{g}^s \subset \mathfrak{gl}^s(\mathfrak{m}_{s-1})$  známe pro každé  $1 \leq s \leq r$ . Definujme

$$\mathfrak{g}^{r+1} := \{A \in \mathfrak{gl}^{r+1}(\mathfrak{m}_r), A[x, y] = [A(x), y] + [x, A(y)], \quad \forall x, y \in \mathfrak{m}\}, \quad (7)$$

V předchozí rovnosti (7)  $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{m} \times \mathfrak{m}_r \rightarrow \mathfrak{m}_r$  rozšiřuje Lieovu závorku  $[\cdot, \cdot]$  na  $\mathfrak{m} \times \mathfrak{m}_0$  a

$$[x, z] = -[z, x] = -z(x), \quad x \in \mathfrak{m}, z \in \mathfrak{g}^s \subset \mathfrak{gl}^s(\mathfrak{m}_{s-1}), 1 \leq s \leq r. \quad (8)$$

Všimněme si, že pro každé  $A \in \mathfrak{g}^r \subset \mathfrak{gl}^r(\mathfrak{m}_{r-1})$  vynuluje nezápornou část  $\sum_{i=0}^{r-1} \mathfrak{g}^i$  algebry  $\mathfrak{m}_{r-1}$ , takže bychom měli uvažovat  $\mathfrak{g}^r \subset \text{Hom}^r(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}_{r-1})$ .

**Věta 6.2.** *Vektorový prostor  $(\mathfrak{m}_0)^\infty := \mathfrak{m}_0 + \sum_{r \geq 1} \mathfrak{g}^r$  nazývaný Tanakovo prodloužení  $\mathfrak{m}_0$  má strukturu gradované Lieovy algebry s Lieovou závorkou s následujícími vlastnostmi:*

1. Lieova závorka dvou prvků z  $\mathfrak{m}_0$  je jejich Lieova závorka v Lieově algebře  $\mathfrak{m}_0$ ;
2. Lieova závorka  $[x, z]$ , kde  $x \in \mathfrak{m}$  a  $z \in \mathfrak{g}^s$  ( $s \geq 1$ ) je dána rovností (8);
3. Lieova závorka  $[f_1, f_2]$ , kde  $f_1 \in \sum_{r \geq 0} \mathfrak{g}^r$  a  $f_2 \in \sum_{r \geq 1} \mathfrak{g}^r$  je definována jako

$$[f_1, f_2](x) = [f_1(x), f_2] + [f_1, f_2(x)], \quad f_1 \in \mathfrak{g}^{r_1}, f_2 \in \mathfrak{g}^{r_2}, x \in \mathfrak{m}.$$

Nechť tedy  $\mathfrak{m}_0 = \sum_{i=-k}^{-1} \mathfrak{m}^i + \mathfrak{g}^0$  je nekladná gradovaná Lieova algebra,  $(\mathfrak{m}_0)^\infty = \mathfrak{m}_0 + \sum_{i \geq 1} \mathfrak{g}^i$  její Tanakovo prodloužení a  $(\mathfrak{m}_l)^{\geq 0} = \sum_{i=0}^l \mathfrak{g}^i$  nezáporná část  $\mathfrak{m}_l = \mathfrak{m}_0 + \sum_{i=1}^l \mathfrak{g}^i$ .

**Definice 6.3.** Nechť  $\mathcal{H}$  je distribuce a  $J : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  je definováno jako  $J(X_1) = -X_2, J(X_2) = X_1$ .  $J$  nazýváme komplexní strukturou horizontální roviny.

**Definice 6.4.** Hermitovská metrika na reálném vektorovém prostoru  $V$  s komplexní strukturou  $J$  je nedegenerativní, pozitivně definitní vnitřní součin  $h$  takový, že

$$h(JX, JY) = h(X, Y), \quad X, Y \in V.$$

**Definice 6.5.** Fundamentální 2-forma  $\Phi$  je definována jako

$$\Phi(X, Y) = h(X, JY), \quad \forall X, Y.$$

Hermitovská metrika na vektorovém prostoru  $V$  s komplexní strukturou  $J$  nazýváme Kählerovou metrikou, pokud její fundamentální 2-forma je uzavřená.

## 6.1 Algebraické Tanakovo prodloužení

Nechť

$$\mathfrak{g}^0 = \text{span}\{\Lambda_1^0, \Lambda_2^0\},$$

kde zvolíme

$$\Lambda_1^0(X_1) = X_1, \quad \Lambda_1^0(X_2) = X_2, \quad \Lambda_2^0(X_1) = X_2, \quad \Lambda_2^0(X_2) = -X_1.$$

Volba těchto automorfismů není náhodná, zachovávají totiž Heisenbergovu geometrii a komplexní strukturu. Protože  $\Lambda_i^0$  jsou derivace, pak můžeme počítat

$$\begin{aligned} \Lambda_1^0(X_3) &= \Lambda_1^0([X_1, X_2]) = [\Lambda_1^0(X_1), X_2] + [X_1, \Lambda_1^0(X_2)] = [X_1, X_2] + [X_1, X_2] = 2X_3, \\ \Lambda_2^0(X_3) &= \Lambda_2^0([X_1, X_2]) = [\Lambda_2^0(X_1), X_2] + [X_1, \Lambda_2^0(X_2)] = [X_2, X_2] + [X_1, -X_1] = 0 \end{aligned}$$

Protože  $\delta^1 \in \text{Hom}(\mathfrak{g}^{-1}, \mathfrak{g}^0) \oplus \text{Hom}(\mathfrak{g}^{-2}, \mathfrak{g}^{-1})$  pak

$$\delta^1(X_1) = \alpha_{11}\Lambda_1^0 + \alpha_{12}\Lambda_2^0, \quad \delta^1(X_2) = \alpha_{21}\Lambda_1^0 + \alpha_{22}\Lambda_2^0,$$

pro nějaké  $\alpha_{ij}, 1 \leq i, j \leq 2$ . Pokud  $\delta^1 \in \mathfrak{g}^1$  pak

$$\begin{aligned} \delta^1(X_3) &= [\delta^1(X_1), X_2] + [X_1, \delta^1(X_2)] = [\alpha_{11}\Lambda_1^0 + \alpha_{12}\Lambda_2^0, X_2] + [X_1, \alpha_{21}\Lambda_1^0 + \alpha_{22}\Lambda_2^0] \\ &= \alpha_{11}\Lambda_1^0(X_2) + \alpha_{12}\Lambda_2^0(X_2) - \alpha_{21}\Lambda_1^0(X_1) - \alpha_{22}\Lambda_2^0(X_1) \\ &= \alpha_{11}X_2 - \alpha_{12}X_1 - \alpha_{21}X_1 - \alpha_{22}X_2 = (\alpha_{11} - \alpha_{22})X_2 + (-\alpha_{12} - \alpha_{21})X_1. \end{aligned}$$

Podobně dostaneme

$$\begin{aligned} \delta^1([X_1, X_3]) &= [\delta^1(X_1), X_3] + [X_1, \delta^1(X_3)] \\ &= [\alpha_{11}\Lambda_1^0 + \alpha_{12}\Lambda_2^0, X_3] + [X_1, (-\alpha_{12} - \alpha_{21})X_1 + (\alpha_{11} - \alpha_{22})X_2] \\ &= \alpha_{11}\Lambda_1^0(X_3) + \alpha_{12}\Lambda_2^0(X_3) + (\alpha_{12} + \alpha_{21})[X_1, X_1] + (\alpha_{11} - \alpha_{22})[X_1, X_2] \\ &= 2\alpha_{11}X_3 + (\alpha_{11} - \alpha_{22})X_3 = 0, \end{aligned}$$

což implikuje

$$3\alpha_{11} = \alpha_{22}.$$

Dále

$$\begin{aligned}\delta^1([X_2, X_3]) &= [\delta^1(X_2), X_3] + [X_2, \delta^1(X_3)] \\ &= [\alpha_{21}\Lambda_1^0 + \alpha_{22}\Lambda_2^0, X_3] + [X_2, (-\alpha_{12} - \alpha_{21})X_1 + (\alpha_{11} - \alpha_{22})X_2] \\ &= \alpha_{21}\Lambda_1^0(X_3) + \alpha_{22}\Lambda_2^0(X_3) + (\alpha_{12} + \alpha_{21})[X_1, X_2] + (\alpha_{11} - \alpha_{22})[X_2, X_2] \\ &= 2\alpha_{21}X_3 + (\alpha_{12} + \alpha_{21})X_3 = 0\end{aligned}$$

implikuje

$$3\alpha_{21} = -\alpha_{12}$$

tedy

$$\delta^1(X_1) = \alpha_{11}\Lambda_1^0 - 3\alpha_{21}\Lambda_2^0, \quad \delta^1(X_2) = \alpha_{21}\Lambda_1^0 + 3\alpha_{11}\Lambda_2^0.$$

Pro výpočet  $\mathfrak{g}^2$  zvolme nyní parametry  $\alpha_{11}, \alpha_{21}$  jako  $(\alpha_{11}, \alpha_{21}) = (1, 0)$  respektive  $(\alpha_{11}, \alpha_{21}) = (0, 1)$ , tedy dostáváme

$$\Lambda_1^1(X_1) = \Lambda_1^0 \quad \Lambda_1^1(X_2) = 3\Lambda_2^0, \quad \Lambda_2^1(X_1) = -3\Lambda_2^0, \quad \Lambda_2^1(X_2) = \Lambda_1^0.$$

Spočtěme nyní vyjádření pole  $X_3$  v  $\Lambda_i^1$ .

$$\begin{aligned}\Lambda_1^1(X_3) &= [\Lambda_1^1(X_1), X_2] + [X_1, \Lambda_1^1(X_2)] = [\Lambda_1^0, X_2] - [3\Lambda_2^0, X_1] = X_2 - 3X_2 = -2X_2 \\ \Lambda_2^1(X_3) &= [\Lambda_2^1(X_1), X_2] + [X_1, \Lambda_2^1(X_2)] = [-3\Lambda_2^0, X_2] - [\Lambda_1^0, X_1] = 3X_1 - X_1 = 2X_1\end{aligned}$$

Nyní předpokládejme, že  $\delta^2 \in \text{Hom}(\mathfrak{g}^{-1}, \mathfrak{g}^1) \oplus \text{Hom}(\mathfrak{g}^{-2}, \mathfrak{g}^0)$ , takže

$$\delta^2(X_1) = \beta_{11}\Lambda_1^1 + \beta_{12}\Lambda_2^1, \quad \delta^2(X_2) = \beta_{21}\Lambda_1^1 + \beta_{22}\Lambda_2^1,$$

pro nějaké  $\beta_{ij}, 1 \leq i, j \leq 2$ . Vypočtěme nyní vyjádření polí  $X_3, [X_1, X_3], [X_2, X_3]$  pro  $\delta^2 \in \mathfrak{g}^2$ .

$$\begin{aligned}\delta^2(X_3) &= [\delta^2(X_1), X_2] + [X_1, \delta^2(X_2)] = [\beta_{11}\Lambda_1^1 + \beta_{12}\Lambda_2^1, X_2] - [\beta_{21}\Lambda_1^1 + \beta_{22}\Lambda_2^1, X_1] \\ &= 3\beta_{11}\Lambda_2^0 + \beta_{12}\Lambda_1^0 - \beta_{21}\Lambda_1^0 + 3\beta_{22}\Lambda_2^0 = (\beta_{12} - \beta_{21})\Lambda_1^0 + (3\beta_{11} + 3\beta_{22})\Lambda_2^0\end{aligned}$$

Z vyjádření závorek  $[X_1, X_3], [X_2, X_3]$  v  $\delta^2$  vypočteme hodnoty koeficientů  $\beta_{ij}$ .

$$\begin{aligned}\delta^2([X_1, X_3]) &= [\beta_{11}\Lambda_1^1 + \beta_{12}\Lambda_2^1, X_3] - [(\beta_{12} - \beta_{21})\Lambda_1^0 + (3\beta_{11} + 3\beta_{22})\Lambda_2^0, X_1] \\ &= -2\beta_{11}X_2 + 2\beta_{12}X_1 + (\beta_{21} - \beta_{12})X_1 - (3\beta_{11} + 3\beta_{22})X_2 \\ &= (\beta_{12} + \beta_{21})X_1 + (-5\beta_{11} - 3\beta_{22})X_2 = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta^2([X_2, X_3]) &= [\beta_{21}\Lambda_1^1 + \beta_{22}\Lambda_2^1, X_3] - [(\beta_{12} - \beta_{21})\Lambda_1^0 + (3\beta_{11} + 3\beta_{22})\Lambda_2^0, X_2] \\ &= -2\beta_{21}X_2 + 2\beta_{22}X_1 + (\beta_{21} - \beta_{12})X_2 + (3\beta_{11} + 3\beta_{22})X_1 \\ &= (3\beta_{11} + 5\beta_{22})X_1 + (-\beta_{21} - \beta_{12})X_2 = 0\end{aligned}$$

Tyto dvě rovnice implikují následující soustavu rovnic

$$\begin{aligned}\beta_{12} + \beta_{21} &= 0 \\ -5\beta_{11} - 3\beta_{22} &= 0 \\ 3\beta_{11} + 5\beta_{22} &= 0 \\ -\beta_{21} - \beta_{12} &= 0\end{aligned}$$



jejímž řešením je  $\beta_{11} = \beta_{22} = 0, \beta_{12} = -\beta_{21}$ , tedy

$$\delta^2(X_1) = -\beta_{21}\Lambda_2^1, \quad \delta^2(X_2) = \beta_{21}\Lambda_1^1.$$

Pokusme se nyní vypočítat  $\mathfrak{g}^3$ . Zvolme tedy  $\beta_{21} = 1$  a potom  $\beta_{12} = 0$ , kde zřejmě toto zobrazení degraduje.

$$\Lambda_1^2(X_1) = -\Lambda_2^1, \quad \Lambda_1^2(X_2) = \Lambda_1^1, \quad \Lambda_2^2(X_1) = 0, \quad \Lambda_2^2(X_2) = 0$$

Spočtěme nyní vyjádření pole  $X_3$  v  $\Lambda_i^2$ .

$$\Lambda_1^2(X_3) = [\Lambda_1^2(X_1), X_2] + [X_1, \Lambda_1^2(X_2)] = [-\Lambda_2^1, X_2] - [\Lambda_1^1, X_1] = \Lambda_1^0 - \Lambda_1^0 = 0$$

$$\Lambda_2^2(X_3) = [\Lambda_2^2(X_1), X_2] + [X_1, \Lambda_2^2(X_2)] = [0, X_2] - [0, X_1] = 0$$

Nyní předpokládejme, že  $\delta^3 \in \text{Hom}(\mathfrak{g}^{-1}, \mathfrak{g}^2)$ , potom

$$\delta^3(X_1) = \gamma_1\Lambda_1^2, \quad \delta^3(X_2) = \gamma_2\Lambda_1^2,$$

pro nějaké  $\gamma_i, i = 1, 2$ . Nyní vypočítáme vyjádření polí  $X_3, [X_1, X_3], [X_2, X_3]$  v  $\delta^3 \in \mathfrak{g}^3$ .

$$\begin{aligned} \delta^3(X_3) &= [\delta^3(X_1), X_2] + [X_1, \delta^3(X_2)] = [\gamma_1\Lambda_1^2, X_2] - [\gamma_2\Lambda_1^2, X_1] = \gamma_1\Lambda_1^1 + \gamma_2\Lambda_2^1 \\ \delta^3([X_1, X_3]) &= [\gamma_1\Lambda_1^2, X_3] - [\gamma_1\Lambda_1^1 + \gamma_2\Lambda_2^1, X_1] = 0 - \gamma_1\Lambda_1^0 - 3\gamma_2\Lambda_2^0 \\ \delta^3([X_2, X_3]) &= [\gamma_2\Lambda_1^2, X_3] - [\gamma_1\Lambda_1^1 + \gamma_2\Lambda_2^1, X_2] = 0 - 3\gamma_1\Lambda_2^0 - \gamma_2\Lambda_1^0 \end{aligned}$$

Vidíme, že jediným řešením je  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ . Dopočítejme nyní ostatní závorky  $[\Lambda_i^j, \Lambda_k^l]$  a sestavme multiplikativní tabulky této Lieovy algebry.

$$\begin{aligned} [\Lambda_1^0, \Lambda_2^0](X_1) &= [X_1, \Lambda_2^0] + [\Lambda_1^0, X_2] = -X_2 + X_2 = 0 \\ [\Lambda_1^0, \Lambda_2^0](X_2) &= [X_2, \Lambda_2^0] + [\Lambda_1^0, -X_1] = -(-X_1) - X_1 = 0 \\ [\Lambda_1^1, \Lambda_1^0](X_1) &= [\Lambda_1^0, \Lambda_1^0] + [\Lambda_1^1, X_1] = \Lambda_1^0 \\ [\Lambda_1^1, \Lambda_1^0](X_2) &= [3\Lambda_2^0, \Lambda_1^0] + [\Lambda_1^1, X_2] = 3\Lambda_2^0 \\ [\Lambda_1^1, \Lambda_2^0](X_1) &= [\Lambda_1^0, \Lambda_2^0] + [\Lambda_1^1, X_2] = 3\Lambda_2^0 \\ [\Lambda_1^1, \Lambda_2^0](X_2) &= [3\Lambda_2^0, \Lambda_2^0] + [\Lambda_1^1, -X_1] = -\Lambda_1^0 \\ [\Lambda_2^1, \Lambda_1^0](X_1) &= [-3\Lambda_2^0, \Lambda_1^0] + [\Lambda_2^1, X_1] = -3\Lambda_2^0 \\ [\Lambda_2^1, \Lambda_1^0](X_2) &= [\Lambda_1^0, \Lambda_1^0] + [\Lambda_2^1, X_2] = \Lambda_1^0 \\ [\Lambda_2^1, \Lambda_2^0](X_1) &= [-3\Lambda_2^0, \Lambda_2^0] + [\Lambda_2^1, X_2] = \Lambda_1^0 \\ [\Lambda_2^1, \Lambda_2^0](X_2) &= [\Lambda_1^0, \Lambda_2^0] + [\Lambda_2^1, -X_1] = 3\Lambda_2^0 \\ [\Lambda_1^1, \Lambda_2^1](X_1) &= [\Lambda_1^0, \Lambda_2^1] + [\Lambda_1^1, -3\Lambda_2^0] = 2\Lambda_2^1 \\ [\Lambda_1^1, \Lambda_2^1](X_2) &= [3\Lambda_2^0, \Lambda_2^1] + [\Lambda_1^1, \Lambda_1^0] = -2\Lambda_1^1 \\ [\Lambda_1^2, \Lambda_1^0](X_1) &= [-\Lambda_2^1, \Lambda_1^0] + [\Lambda_1^2, X_1] = -2\Lambda_2^1 \\ [\Lambda_1^2, \Lambda_1^0](X_2) &= [\Lambda_1^1, \Lambda_1^0] + [\Lambda_1^2, X_2] = 2\Lambda_1^1 \\ [\Lambda_1^2, \Lambda_2^0](X_1) &= [-\Lambda_2^1, \Lambda_2^0] + [\Lambda_1^2, X_2] = 0 \\ [\Lambda_1^2, \Lambda_2^0](X_2) &= [\Lambda_1^1, \Lambda_2^0] + [\Lambda_1^2, -X_1] = 0 \\ [\Lambda_1^2, \Lambda_1^1](X_1) &= [-\Lambda_2^1, \Lambda_1^1] + [\Lambda_1^2, \Lambda_1^0] = 0 \\ [\Lambda_1^2, \Lambda_1^1](X_2) &= [\Lambda_1^1, \Lambda_1^1] + [\Lambda_1^2, 3\Lambda_2^0] = 0 \\ [\Lambda_1^2, \Lambda_2^1](X_1) &= [-\Lambda_2^1, \Lambda_2^1] + [\Lambda_1^2, -3\Lambda_2^0] = 0 \\ [\Lambda_1^2, \Lambda_2^1](X_2) &= [\Lambda_1^1, \Lambda_2^1] + [\Lambda_1^2, \Lambda_1^0] = 0 \end{aligned}$$

Dostáváme tedy osmidimenzionální Lieovu algebru s následující multiplikativní tabulkou:

$[\cdot, \cdot]$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$\Lambda_1^0$	$\Lambda_2^0$	$\Lambda_1^1$	$\Lambda_2^1$	$\Lambda^2$
$X_1$	0	$X_3$	0	$-X_1$	$-X_2$	$-\Lambda_1^0$	$3\Lambda_2^0$	$\Lambda_2^1$
$X_2$	$-X_3$	0	0	$-X_2$	$X_1$	$-3\Lambda_2^0$	$-\Lambda_1^0$	$-\Lambda_1^1$
$X_3$	0	0	0	$-2X_3$	0	$2X_2$	$-2X_1$	0
$\Lambda_1^0$	$X_1$	$X_2$	$2X_3$	0	0	$-\Lambda_1^1$	$-\Lambda_2^1$	$-2\Lambda^2$
$\Lambda_2^0$	$X_2$	$-X_1$	0	0	0	$\Lambda_2^1$	$-\Lambda_1^1$	0
$\Lambda_1^1$	$\Lambda_1^0$	$3\Lambda_2^0$	$-2X_2$	$\Lambda_1^1$	$-\Lambda_2^1$	0	$-2\Lambda^2$	0
$\Lambda_2^1$	$-3\Lambda_2^0$	$\Lambda_1^0$	$2X_1$	$\Lambda_2^1$	$\Lambda_1^1$	$2\Lambda^2$	0	0
$\Lambda^2$	$-\Lambda_2^1$	$\Lambda_1^1$	0	$2\Lambda^2$	0	0	0	0

Tabulka 4: Multiplikativní tabulka Tanakova prodloužení pro Dubin's car

## 6.2 Geometrické Tanakovo prodloužení

Pro zjednodušení nyní označme prvky Tanakova prodloužení  $(\mathfrak{m}_0)^\infty$  jako  $e_i$ , takže máme multiplikativní tabulku

$[\cdot, \cdot]$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$	$e_6$	$e_7$	$e_8$
$e_1$	0	$e_3$	0	$-e_1$	$-e_2$	$-e_4$	$3e_5$	$e_7$
$e_2$	$-e_3$	0	0	$-e_2$	$e_1$	$-3e_5$	$-e_4$	$-e_6$
$e_3$	0	0	0	$-2e_3$	0	$2e_2$	$-2e_1$	0
$e_4$	$e_1$	$e_2$	$2e_3$	0	0	$-e_6$	$-e_7$	$-2e_8$
$e_5$	$e_2$	$-e_1$	0	0	0	$e_7$	$-e_6$	0
$e_6$	$e_4$	$3e_5$	$-2e_2$	$e_6$	$-e_7$	0	$-2e_8$	0
$e_7$	$-3e_5$	$e_4$	$2e_1$	$e_7$	$e_6$	$2e_8$	0	0
$e_8$	$-e_7$	$e_6$	0	$2e_8$	0	0	0	0

Naším cílem je najít osm vektorových polí na  $M$ , které tvoří stejnou Lieovu algebru, a jejichž závorka zachovává původní distribuci. Takovým polím se říká infinitesimální automorfismy. Následující výpočet je založen na algoritmu, který je možné nalézt v [5]. Abychom tato pole našli, zavedeme si takzvanou Maurer-Cartan formu, tedy zobrazení  $\omega : TM \rightarrow \mathfrak{g}$  takové, že  $\omega = \omega_x dx + \omega_y dy + \omega_\theta d\theta$  splňuje  $\omega(X_i) = e_i$ . Dostaneme tedy

$$\begin{aligned} e_1 &= (\omega_x dx + \omega_y dy + \omega_\theta d\theta)(\partial_\theta) = \omega_\theta, \\ e_2 &= (\omega_x dx + \omega_y dy + \omega_\theta d\theta)(\partial_x + \theta \partial_y) = \omega_x + \theta \omega_y, \\ e_3 &= (\omega_x dx + \omega_y dy + \omega_\theta d\theta)(\partial_y) = \omega_y. \end{aligned}$$

Potom

$$\omega = (e_2 - \theta e_3)dx + e_3 dy + e_1 dx = d\theta e_1 + dx e_2 + (dy - \theta dx) e_3$$

a označme

$$\begin{aligned} \omega^{-1} &= d\theta e_1 + dx e_2, \\ \omega^{-2} &= (dy - \theta dx) e_3. \end{aligned}$$

Nechť  $e_3 \in \mathfrak{g}^{-2}$ , pak hledané  $Y_{e_3}$  splňující

$$\omega(Y_{e_3}) = u^{-2},$$

kde  $u^{-2} = e_3$ , je právě  $Y_{e_3} = \partial_y$ . Necht' nyní  $e_2 \in \mathfrak{g}^{-1}$  takové, že hledáme  $Y_{e_2}$  splňující  $\omega(Y_{e_2}) = u^{-1} + u^{-2}$ , kde

$$\begin{aligned} u^{-1} &= e_2, \\ du^{-2} &= [u^{-1}, \omega^{-1}]. \end{aligned}$$

Výpočtem těchto rovnic

$$\begin{aligned} u^{-1} &= e_2 \\ du^{-2} &= [e_2, d\theta e_1 + dx e_2] = -d\theta e_3 \end{aligned}$$

dávající  $u^{-1} = e_2, u^{-2} = -\theta e_3$ , je řešení  $Y_{e_2}$  rovnice  $\omega(Y_{e_2}) = e_2 - \theta e_3$ .

$$Y_{e_2} = \partial_x + \theta \partial_y - \theta \partial_y = \partial_x$$

Necht' nyní  $e_1 \in \mathfrak{g}^{-1}$  takové, že hledáme  $Y_{e_1}$  splňující  $\omega(Y_{e_1}) = u^{-1} + u^{-2}$ , kde

$$\begin{aligned} u^{-1} &= e_1, \\ du^{-2} &= [u^{-1}, \omega^{-1}]. \end{aligned}$$

Výpočtem těchto rovnic

$$\begin{aligned} u^{-1} &= e_1 \\ du^{-2} &= [e_1, d\theta e_1 + dx e_2] = dx e_3 \end{aligned}$$

dávající  $u^{-1} = e_1, u^{-2} = x e_3$ , je řešení  $Y_{e_1}$  rovnice  $\omega(Y_{e_1}) = e_1 + x e_3$ .

$$Y_{e_1} = \partial_\theta + x \partial_y$$

Dostáváme tak algebru  $\langle Y_{e_1}, Y_{e_2}, Y_{e_3} \rangle$  izomorfní s algebrou  $\langle X_1, X_2, X_3 \rangle$ . Necht' nyní  $e_4 \in \mathfrak{g}^0$  takové, že hledáme  $Y_{e_4}$  splňující  $\omega(Y_{e_4}) = u^0 + u^{-1} + u^{-2}$ , kde

$$\begin{aligned} u^0 &= e_4, \\ du^{-1} &= [u^0, \omega^{-1}], \\ du^{-2} &= [u^{-1}, \omega^{-1}] + [u^0, \omega^{-2}]. \end{aligned}$$

Výpočtem těchto rovnic

$$\begin{aligned} u^0 &= e_4 \\ du^{-1} &= [e_4, d\theta e_1 + dx e_2] = d\theta e_1 + dx e_2 \end{aligned}$$

dávající  $u^0 = e_4, u^{-1} = \theta e_1 + x e_2$  a navíc

$$du^{-2} = [\theta e_1 + x e_2, d\theta e_1 + dx e_2] + [e_4, (dy - \theta dx) e_3] = (\theta dx - x d\theta) e_3 + 2(dy - \theta x) e_3$$

dávající  $u^{-2} = (2y - x\theta) e_3$ , získáme řešení  $Y_{e_4}$  rovnice  $\omega(Y_{e_4}) = e_4 + \theta e_1 + x e_2 + (2y - x\theta) e_3$ .

$$Y_{e_4} = x \partial_x + 2y \partial_y + \theta \partial_\theta$$

Necht' nyní  $e_5 \in \mathfrak{g}^0$  takové, že hledáme  $Y_{e_5}$  splňující  $\omega(Y_{e_5}) = u^0 + u^{-1} + u^{-2}$ , kde

$$\begin{aligned} u^0 &= e_5, \\ du^{-1} &= [u^0, \omega^{-1}], \\ du^{-2} &= [u^{-1}, \omega^{-1}] + [u^0, \omega^{-2}]. \end{aligned}$$

Výpočtem těchto rovnic

$$\begin{aligned} u^0 &= e_5 \\ du^{-1} &= [e_5, d\theta e_1 + dx e_2] = d\theta e_2 - dx e_1 \end{aligned}$$

dávající  $u^0 = e_4, u^{-1} = \theta e_2 - x e_1$  a navíc

$$du^{-2} = [\theta e_2 - x e_1, d\theta e_1 + dx e_2] + [e_5, (dy - \theta dx) e_3] = (-\theta d\theta - x dx) e_3$$

dávající  $u^{-2} = -\frac{1}{2}(\theta^2 + x^2) e_3$ , získáme řešení  $Y_{e_5}$  rovnice  $\omega(Y_{e_5}) = e_5 + \theta e_2 - x e_1 - \frac{1}{2}(\theta^2 + x^2) e_3$ .

$$Y_{e_5} = \theta \partial_x - \frac{1}{2}(x^2 - \theta^2) \partial_y - x \partial_\theta$$

Nechť nyní  $e_6 \in \mathfrak{g}^1$  takové, že hledáme  $Y_{e_6}$  splňující  $\omega(Y_{e_6}) = u^1 + u^0 + u^{-1} + u^{-2}$ , kde

$$\begin{aligned} u^1 &= e_6, \\ du^0 &= [u^1, \omega^{-1}], \\ du^{-1} &= [u^1, \omega^{-2}] + [u^0, \omega^{-1}], \\ du^{-2} &= [u^{-1}, \omega^{-1}] + [u^0, \omega^{-2}]. \end{aligned}$$

Výpočtem těchto rovnic

$$\begin{aligned} u^1 &= e_6 \\ du^0 &= [e_6, d\theta e_1 + dx e_2] = d\theta e_4 + 3dx e_5 \end{aligned}$$

dávající  $u^1 = e_6, u^0 = \theta e_4 + 3x e_5$  a navíc

$$du^{-1} = [\theta e_4 + 3x e_5, d\theta e_1 + dx e_2] + [e_6, (dy - \theta dx) e_3] = (3xd\theta + 3\theta dx - 2dy) e_2 + (\theta d\theta - 3x dx) e_1$$

dávající  $u^{-1} = \frac{1}{2}(\theta^2 - 3x^2) e_1 + (3x\theta - 2y) e_2$  a ještě z rovnice

$$\begin{aligned} du^{-2} &= \left[ \frac{1}{2}(\theta^2 - 3x^2) e_1 + (3x\theta - 2y) e_2, d\theta e_1 + dx e_2 \right] + [\theta e_4 + 3x e_5, (dy - \theta dx) e_3] \\ &= \left( 2\theta dy - 2\theta^2 dx - 3\theta x d\theta + 2y d\theta + \frac{1}{2}\theta^2 dx - \frac{3}{2}x^2 dx \right) e_3 \end{aligned}$$

získáme  $u^{-2} = (2y\theta - \frac{3}{2}\theta^2 x - 3\theta x^3) e_3$ . Z těchto rovnic získáme řešení  $Y_{e_6}$  rovnice  $\omega(Y_{e_6}) = e_6 + \theta e_4 + 3x e_5 + \frac{1}{2}(\theta^2 - 3x^2) e_1 + (3x\theta - 2y) e_2 + (2y - \frac{3}{2}\theta^2 x - \frac{1}{2}x^3) e_3$ .

$$Y_{e_6} = \left( \frac{1}{2}\theta^2 - 3x^2 \right) \partial_\theta + (3x\theta - 2y) \partial_x + \left( \frac{3}{2}\theta^2 x - 2y\theta + 2y - \frac{1}{2}x^3 \right) \partial_y$$

Nechť nyní  $e_7 \in \mathfrak{g}^1$  takové, že hledáme  $Y_{e_7}$  splňující  $\omega(Y_{e_7}) = u^1 + u^0 + u^{-1} + u^{-2}$ , kde

$$\begin{aligned} u^1 &= e_7, \\ du^0 &= [u^1, \omega^{-1}], \\ du^{-1} &= [u^1, \omega^{-2}] + [u^0, \omega^{-1}], \\ du^{-2} &= [u^{-1}, \omega^{-1}] + [u^0, \omega^{-2}]. \end{aligned}$$

Výpočtem těchto rovnic

$$\begin{aligned} u^1 &= e_7 \\ du^0 &= [e_7, d\theta e_1 + dx e_2] = dx e_4 - 3d\theta e_5 \end{aligned}$$

dávající  $u^1 = e_7, u^0 = x e_4 - 3\theta e_5$  a navíc

$$du^{-1} = [x e_4 - 3\theta e_5, d\theta e_1 + dx e_2] + [e_7, (dy - \theta dx) e_3] = (x dx - 3\theta d\theta - 2dy) e_2 + (\theta dx + x d\theta + 2dy) e_1$$

dávající  $u^{-1} = (\theta x + 2y) e_1 + \frac{1}{2}(x^2 - 3\theta^2) e_2$  a ještě z rovnice

$$\begin{aligned} du^{-2} &= \left[ (\theta x + 2y) e_1 + \frac{1}{2}(x^2 - 3\theta^2) e_2, d\theta e_1 + dx e_2 \right] + [x e_4 - 3\theta e_5, (dy - \theta dx) e_3] \\ &= \left( 2x dy + 2y dx - \theta x dx - \frac{1}{2} x^2 d\theta + \frac{3}{2} \theta^2 d\theta \right) e_3 \end{aligned}$$

získáme  $u^{-2} = (2xy - \frac{1}{2}\theta x^2 + \frac{1}{2}\theta^2) e_3$ . Z těchto rovnic získáme řešení  $Y_{e_6}$  rovnice  $\omega(Y_{e_7}) = e_7 + x e_4 - 3\theta e_5 + (\theta x + 2y) e_1 + \frac{1}{2}(x^2 - 3\theta^2) e_2 + (2xy - \frac{1}{2}\theta x^2 + \frac{1}{2}\theta^2) e_3$ .

$$Y_{e_7} = (2y + \theta x) \partial_\theta + \frac{1}{2}(x^2 - 3\theta^2) \partial_x + (2xy - \theta^3) \partial_y$$

Vypočítali jsme tedy sedm infinitesimálních automorfismů, které zachovávají horizontální distribuci. Poslední vektorové pole jsme nedopočítali, výpočet se komplikuje a bylo by potřeba podrobnější analýzy systému diferenciálních rovnic. V další kapitole provedeme simulace demonstrující tuto vlastnost na zvoleném vstupním signálu a na zvolené integrační křivce.

## 7 Návrhy řízení

V této podkapitole budeme simulovat pohyb mechanismu pomocí vstupního singálu. Poznamenejme, že výpočty a grafy byly vygenerovány softwarem *Maple Software*. Vstupní signál  $X$  uvažujeme jako kombinaci vektorových polí ze systému (1).

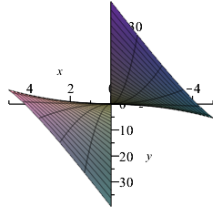
$$X = A \cos(t) V_1(q) + A \sin(t) V_2(q)$$

Tuto kombinaci jsme zvolili proto, abychom parametrem  $t \in \langle -\pi; \pi \rangle$  získali třídu kombinací. Parametr  $A \in \langle 0; 5 \rangle$  pak reprezentuje amplitudu signálu. Tento signál budeme posouvat násobením zleva pomocí infinitesimálního automorfismu z Tanakova prodloužení, tedy automorfismem, který zachovává horizontálnost. Prvně vezmeme automorfismus  $Y_{e_4}$ , pak násobením zleva realizujeme Lieovou závorkou jako

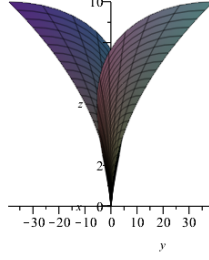
$$T_1 := [Y_{e_4}, X] = -A \sin(t) \partial_x - A \sin(t) z \partial_y - A \cos(t) \partial_z.$$

Tok pole  $T_1$  je tedy

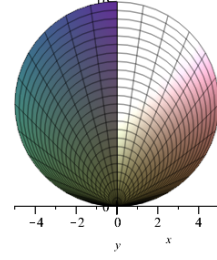
$$\Phi_{T_1}(t) = \left( A \cos(t) - A, -\frac{1}{4} A^2 \sin(2t) + \frac{1}{2} A^2 t, -A \sin(t) \right).$$



(a) Projekce  $xy$



(b) Projekce  $yz$



(c) Projekce  $xz$

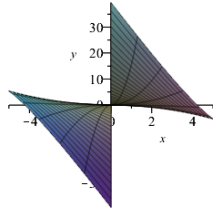
Obrázek 5: Zobrazení toku  $\Phi_{T_1}$  v jednotlivých projekcích

Nyní provedme stejné úvahy pro automorfismus  $Y_{e_5}$ .

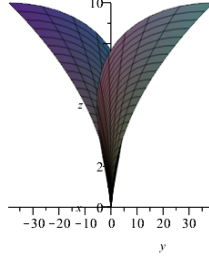
$$T_2 := [Y_{e_5}, X] = -A \cos(t) \partial_x + Az \cos(t) \partial_y + A \sin(t) \partial_z$$

Spočítáme tok  $\Phi_{T_2}(t)$ .

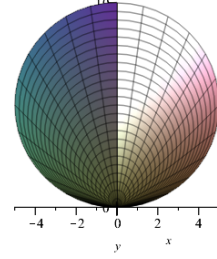
$$\Phi_{T_2}(t) = \left( -A \sin(t) + x, -\frac{A^2 \sin(2t)}{4} - \frac{A^2 t}{2} + A(A+z) \sin(t) + y, -A \cos(t) + A + z \right)$$



(a) Projekce  $xy$



(b) Projekce  $yz$



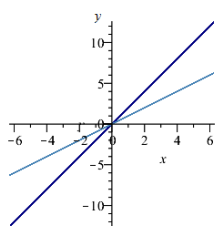
(c) Projekce  $xz$

Obrázek 6: Zobrazení toku  $\Phi_{T_2}$  v jednotlivých projekcích

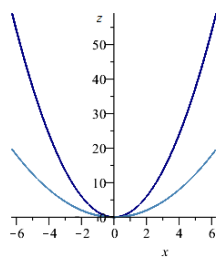
Z Obrázku 7 je vidět, že automorfismy  $Y_{e_4}, Y_{e_5}$  pouze reparametrizují vstupní signálovou plochu. Je to způsobeno tím, že toky odpovídají homomorfismům distribuce. Uvažujme nyní integrální křivku  $c$  zadanou parametrickými rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= t, \\ y &= t, \\ z &= \frac{1}{2}t^2, \end{aligned}$$

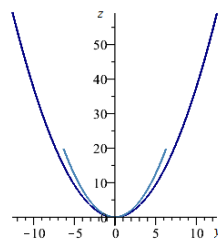
pro parametr  $t \in \langle -2\pi, 2\pi \rangle$ . Tuto křivku budeme posouvat levým násobením stejně jako ve větě (5.5). To můžeme realizovat toky infinitezimálních automorfismů  $Y_{e_1}, \dots, Y_{e_7}$ . Transformujme tuto křivku nejdříve automorfismy  $Y_{e_1}, Y_{e_2}$ .



(a) Projekce  $xy$

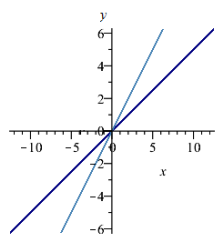


(b) Projekce  $xz$

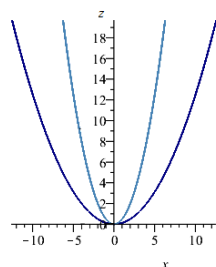


(c) Projekce  $yz$

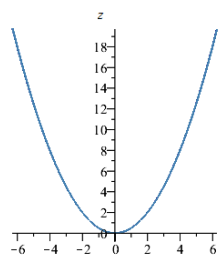
Obrázek 7: Transformace křivky  $c$  automorfismem  $Y_{e_1}$



(a) Projekce  $xy$



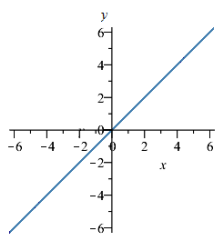
(b) Projekce  $xz$



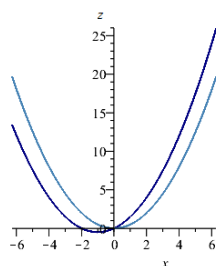
(c) Projekce  $yz$

Obrázek 8: Transformace křivky  $c$  automorfismem  $Y_{e_2}$

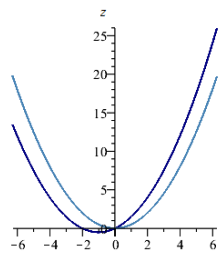
Vidíme, že automorfismy  $Y_{e_1}, Y_{e_2}$  zachovávají vrchol paraboly  $c$ , ale transformují její tvar. Transformujme křivku  $c$  automorfismem  $Y_{e_3}$ .



(a) Projekce  $xy$



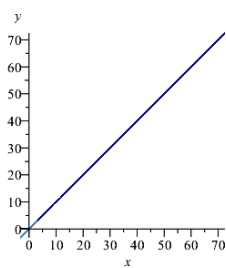
(b) Projekce  $xz$



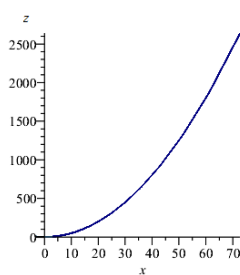
(c) Projekce  $yz$

Obrázek 9: Transformace křivky  $c$  automorfismem  $Y_{e_3}$

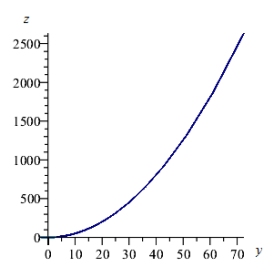
Zřejmě tento automorfismus naopak zachovává tvar paraboly, ale posouvá její vrchol. Transformujme parabolu automorfismem  $Y_{e_4}$ .



(a) Projekce  $xy$



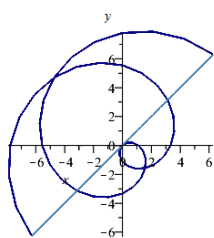
(b) Projekce  $xz$



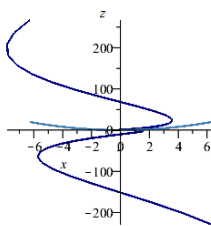
(c) Projekce  $yz$

Obrázek 10: Transformace křivky  $c$  automorfismem  $Y_{e_4}$

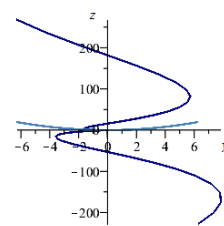
Tento automorfismus reparametrizuje danou křivku  $c$ . V případě automorfismu  $Y_{e_5}$  dochází ke složité transformaci křivky  $c$ . V tomto případě je parabola transformována na prostorovou křivku, jak je možné vidět na obrázku 11.



(a) Projekce  $xy$



(b) Projekce  $xz$



(c) Projekce  $yz$

Obrázek 11: Transformace křivky  $c$  automorfismem  $Y_{e_5}$



## 8 Závěr

Obsahem této práce bylo analyzovat říditelnost neholonomních systémů, nalézt jejich řídicí algebry a nakonec nalézt automorfismy, které zachovávají integrální křivky konfiguračního prostoru.

Nejdříve jsme analyzovali zjednodušenou verzi modelu Dubin's car. Pak jsme do tohoto modelu přidali další řídicí parametr, nicméně se ukázalo, že na lokální řízení tento parametr má minimální vliv. Protože jeho řídicí algebra není nilpotentní, uvedli jsme Bellaïcheův algoritmus nilpotentní aproximace, který z podkladové Lieovy algebry vytvoří nilpotentní algebru. Ukázalo se, že ve studovaných případech, jejichž hloubka filtrace je maximálně 2, lze tento algoritmus značně zredukovat. Pro původní model jsme tedy sestrojili nilpotentní aproximaci včetně multiplikativní tabulky. Jeho nilpotentní algebra má tři vektorová pole. Stejně úvahy jsme pak provedli i pro další modelové mechanismy (robotický had, Trident mechanismus), avšak kvůli pracnosti dalších výpočtů jsme v dalším rozboru pracovali pouze s modelem Dubin's car.

Ukázalo se, že řídicí algebra modelu Dubin's car má strukturu Heisenbergovy algebry. Tento fakt jsme s výhodou použili pro konstrukci Tanakova prodloužení, které zachovává Heisenbergovu geometrii, následně jsme sestrojili úplnou multiplikativní tabulku Tanakova prodloužení (Tabulka 4) pro tento model a dále jsme našli infinitesimální automorfismy zachovávající horizontálnost křivek na distribuci  $\mathcal{D}$ . Těchto automorfismů má mít tato algebra celkem osm, avšak se dokázalo spočítat pouze sedm z nich.

V poslední kapitole jsme vlastnosti těchto algeber ukázali na návrhu řízení. Nejprve jsme zvolili kombinaci řešení neholonomního systému (1). Tuto kombinaci jsme zobrazovali automorfismy na konfigurační prostor, avšak jsme zjistili, že tyto automorfismy tuto kombinaci pouze reparametrizují, protože tato kombinace je jednoparametrická soustava horizontálních křivek. Pak jsme vzali náhodně zvolenou integrální křivku a pomocí toků infinitesimálních automorfismů ji převedli na jinou horizontální křivku. Tyto transformace jsme následně popsali.

## Reference

- [1] Reeds, J.A., Shepp, L.A., Optimal paths for a car that goes both forwards and backwards, *Pacific J. Math.*, 145 (1990).
- [2] Bloch, E. D. A first course in geometric topology and differential geometry. Boston: Birkhauser, c1997. ISBN 3764338407.
- [3] Rezapour, E. et al.: Path following control of planar snake robots using virtual holonomic constraints: theory and experiments. *Robotics and Biomimetics*, 2014.
- [4] Frolík, Stanislav. Geometrická teorie řízení mechanismů s filtrací (4, 7) [online]. Brno, 2017 [cit. 2019-05-21]. Dostupné z: <https://www.vutbr.cz/studenti/zav-prace/detail/100125>. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav matematiky. Vedoucí práce Jaroslav Hrdina.
- [5] Alekseevsky, D., David, L., *Annali di Matematica* (2017) 196: 1137. <https://doi.org/10.1007/s10231-016-0610-7>.
- [6] Jean, F., Control of nonholonomic systems: from sub-Riemannian geometry to motion planning. New York: Springer, 2014. ISBN 9783319086897.
- [7] Calin, O., Chang, D. E., Greiner, P. C., Geometric analysis on the Heisenberg group and its generalizations. Somerville, MA: International Press, c2007. ISBN 0821843192.
- [8] Kolář, I., Úvod do globální analýzy. Brno: Masarykova univerzita v Brně, 2003. ISBN 8021032057.
- [9] Hrdina, J., Matoušek, R., Návrat, A., Vašík, P. Nilpotent approximation of a trident snake robot controlling distribution. *Kybernetika*, 2017, roč. 53, č. 6, s. 1118-1130. ISSN: 0023-5954.
- [10] Hrdina, J., Zalabová, L., Local geometric control of a certain mechanism with the growth vector (4,7), *arXiv:1802.08480*, 2018
- [11] Murray, Richard M., Zexiang LI a Shankar Sastry. A mathematical introduction to robotic manipulation. Boca Raton: CRC Press, c1994. ISBN 978-0-8493-7981-9.
- [12] Motl, L., Zahradník, M. Pěstujeme lineární algebru, Praha : Univerzita Karlova v Praze, nakladatelství Karolinum, 2002. ISBN 978-8-0718-4186-9.
- [13] Rousseau, C., Saint-Aubin Y. Mathematics and technology. London: Springer, 2008. ISBN 978-0-387-69215-9.
- [14] Selig, J. M. Geometric fundamentals of robotics. 2nd ed. New York: Springer, 2005. ISBN 0-387-20874-7.